MULTIZÊTAS,
MULTIZÊTAS FORMELLES,
ALGÈBRE DE DOUBLE MÉLANGE

par

Samuel Baumard

Introduction

L'étude des nombres multizêtas remonte à la première moitié du dix-huitième siècle, et est généralement attribuée à Euler ; mais ces nombres suscitent un regain d'intérêt depuis les années 90, notamment grâce à Hoffmann et Zagier. Les notions introduites ici ont par ailleurs des liens étroits avec, entre autres, le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, le groupe de Galois absolu, la théorie des nœuds, les diagrammes de Feynman et la théorie quantique des champs, toutes choses dont on ne parlera pas ici...

Cet exposé est largement inspiré de celui de Pierre Cartier (*Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*, séminaire Bourbaki, Astérisque 282).

1. Multizêtas réelles

1.1. Définitions. — Soit $(s_1, \ldots, s_r)$ une suite d'entiers supérieurs à 1 avec $s_1 \geqslant 2$. On lui associe le réel

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}}$$

qui a bien un sens par la condition sur s_1. Bien sûr, quand $r = 1$, on retrouve les valeurs aux entiers positifs de la fonction zêta d'Euler.

On définit aussi un *polylogarithme* de la façon suivante : sans contrainte sur s_1, si $z \in \mathbb{C}$ est de module strictement plus petit que 1, on pose

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}}.$$

Par conséquent, $\zeta(s_1,\dots,s_r)=\lim_{\mathbb{R}\ni z\to 1^-}\mathrm{Li}_{s_1,\dots,s_r}(z)$. On en tire une définition intégrale des nombres multizêtas comme suit. En dérivant un polylogarithme, on obtient

$$\mathrm{dLi}_{s_1,\dots,s_r}=\begin{cases}\omega_0\,\mathrm{Li}_{s_1-1,\dots,s_r} & \text{si } s_1\geqslant 2\\ \omega_1\,\mathrm{Li}_{s_2,\dots,s_r} & \text{si } s_1=1\end{cases}$$

avec $\omega_0=\frac{\mathrm{d}z}{z}$ et $\omega_1=\frac{\mathrm{d}z}{1-z}$. On peut donc écrire les polylogarithmes comme des *intégrales itérées* : par récurrence,

$$\mathrm{Li}_{s_1,\dots,s_r}(z)=\int_{0<t_s<\cdots<t_1<z}\omega_{i_1}(t_1)\cdots\omega_{i_s}(t_s)$$

avec $s=s_1+\cdots+s_r$ et $i_j=1$ si $j\in\{s_1,s_1+s_2,\dots,s_1+\cdots+s_r\}$ et $i_j=0$ sinon, et donc

$$\zeta(s_1,\dots,s_r)=\int_{0<t_s<\cdots<t_1<1}\omega_{i_1}(t_1)\cdots\omega_{i_s}(t_s).$$

On voit donc aussi les multizêtas comme des intégrales sur un simplexe.

1.2. Relations de mélange. — Chacune des deux définitions des multizêtas permet de décomposer un produit de deux multizêtas comme somme de multizêtas. Commençons par le cas le plus simple, celui de la définition intégrale. D'abord, introduisons quelques notations : on note $\mathfrak{h}=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$ l'algèbre des polynômes non commutatifs à deux variables, $\mathfrak{h}^1=\mathfrak{h}\,y$ et $\mathfrak{h}^0=x\,\mathfrak{h}\,y$. Un élément de $\mathfrak{h}^1$ se réécrit comme un polynôme en les nouvelles variables $y_i=x^{i-1}y$, et à tout monôme $y_{s_1}\cdots y_{s_r}$ de $\mathfrak{h}^0$, on associe le réel $\hat\zeta(y_{s_1}\cdots y_{s_r})=\zeta(s_1,\dots,s_r)$, puis on étend $\hat\zeta$ à toute $\mathfrak{h}^0$ par $\mathbb{Q}$-linéarité.

L'écriture intégrale des multizêtas se traduit par une écriture en fonction de $x_0=x$ et $x_1=y$: en effet, on vérifie immédiatement que

$$\hat\zeta(x_{i_1}\cdots x_{i_s})=\int_{0<t_s<\cdots<t_1<1}\omega_{i_1}(t_1)\cdots\omega_{i_s}(t_s).$$

Voyons alors ce que donne un produit de multizêtas. Le produit de deux intégrales sur un simplexe donne une intégrale sur un produit de simplexes, qui se décompose lui-même en réunion disjointe (à des parties de mesure nulle près) de simplexes. Plus formellement,

$$\hat\zeta(x_{i_1}\cdots x_{i_k})\hat\zeta(x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_{k+\ell}})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k,\ell}}\int_{0<u_{k+\ell}<\cdots<u_1<1}\omega_{i_1}(u_{\sigma(1)})\cdots\omega_{i_{k+\ell}}(u_{\sigma(k+\ell)})$$

où $\mathfrak{S}_{k,\ell}$ est l'ensemble des permutations de $[\![1,k+\ell]\!]$ qui sont strictement croissantes sur $[\![1,k]\!]$ et sur $[\![k+1,k+\ell]\!]$. Donc

$$\hat\zeta(x_{i_1}\cdots x_{i_k})\hat\zeta(x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_{k+\ell}})=\hat\zeta\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k,\ell}}x_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots x_{i_{\sigma^{-1}(k+\ell)}}\Big).$$

Tout ceci se réécrit plus simplement en termes de *produits de shuffle*. En effet, en posant

$$x_{i_1}\cdots x_{i_k}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{« sha »}}}{\text{ш}}x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_{k+\ell}}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k,\ell}}x_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots x_{i_{\sigma^{-1}(k+\ell)}}$$

on munit $\mathfrak{h}$ d'une structure d'algèbre associative et commutative $\mathfrak{h}_{ш}$, dont $\mathfrak{h}^0 = \mathfrak{h}^0_{ш}$ est une sous-algèbre, et pour laquelle $\hat{\zeta} : \mathfrak{h}^0_{ш} \to \mathbb{R}$ *est un morphisme d'algèbres* !

Par exemple, on obtient la relation

$$\zeta(2)^2 = \hat{\zeta}(xy \mathbin{ш} xy) = 2\,\zeta(2,2) + 4\,\zeta(3,1).$$

Revenons à la définition initiale des multizêtas. En multipliant les séries, on aboutit à

$$\zeta(s_1,\dots,s_k)\zeta(s_{k+1},\dots,s_{k+\ell}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^*_{k,\ell}} \sum_{n_1>\dots>n_{k+\ell}} \frac{1}{n_{\sigma(1)}^{s_1}\cdots n_{\sigma(k+\ell)}^{s_{k+\ell}}}$$

où $\mathfrak{S}^*_{k,\ell}$ est l'ensemble des *applications* (et non plus des permutations) de $[\![1, k+\ell]\!]$ dans lui-même dont les restrictions à $[\![1, k]\!]$ et à $[\![k+1, k+\ell]\!]$ sont strictement croissantes.

Voyons les choses en termes de l'algèbre $\mathfrak{h}^0$. En reprenant la décomposition ci-dessus du produit des deux séries, on voit que le produit $\hat{\zeta}(y_{s_1}\cdots y_{s_k})\hat{\zeta}(y_{s_{k+1}}\cdots y_{s_{k+\ell}})$ est obtenu comme valeur de $\hat{\zeta}$ sur le *mélange contractant* (ou *stuffle*) de $y_{s_1}\cdots y_{s_k}$ et $y_{s_{k+1}}\cdots y_{s_{k+\ell}}$, c'est-à-dire sur la somme des mots obtenus à partir du shuffle $y_{s_1}\cdots y_{s_k} \mathbin{ш} y_{s_{k+1}}\cdots y_{s_{k+\ell}}$ (effectué relativement aux variables y_i) en remplaçant un nombre arbitraire de sous-mots $y_{s_i}y_{s_j}$ par $y_{s_{i+j}}$ lorsque $i \leqslant k < j$.

On a donc encore un autre produit, noté $*$, sur $\mathfrak{h}^1 = \mathfrak{h}^1_*$, pour lequel $\mathfrak{h}^0 = \mathfrak{h}^0_*$ est encore une sous-algèbre et $\hat{\zeta}$ encore un morphisme. On obtient par exemple

$$\zeta(2)^2 = 2\,\zeta(2,2) + \zeta(4)$$

que l'on peut retrouver directement en partitionnant en trois le domaine de sommation. La combinaison de cette relation et de la précédente fournit ainsi

$$\boxed{\zeta(4) = 4\,\zeta(3,1).}$$

Remarquons au passage que certaines classes de nombres multizêtas sont connues explicitement. Par exemple, la formule

$$\zeta(\underbrace{3,1,\dots,3,1}_{r}) = \frac{2\pi^{4r}}{(4r+2)!}$$

a été conjecturée par Zagier sur la base d'expérimentations numériques, et prouvée par Broadhurst en 1996.

1.3. Renormalisation. — On peut étendre $\hat{\zeta}$ à deux morphismes d'algèbres $\hat{\zeta}_{*,ш} : \mathfrak{h}^1_{*,ш} \to \mathbb{R}$. On peut reprendre les définitions de départ aux points de divergence et « isoler une partie convergente en supprimant la partie divergente ». On peut aussi procéder purement algébriquement : pour $\mathfrak{h}^1_*$ par exemple, on définit une dérivation $D : \mathfrak{h}^1_* \to \mathfrak{h}^1_*$ par

$$D(y_{k_1}\cdots y_{k_r}) = \begin{cases} y_{k_2}\cdots y_{k_r} & \text{si } k_1 = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui donne une projection $\mathrm{reg}_* : \mathfrak{h}^1_* \to \mathfrak{h}^0_*$ qui est aussi un morphisme d'algèbres, définie par

$$\mathrm{reg}_* = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} y_1^{*i} * D^i.$$

Cela permet de prolonger $\hat{\zeta}$ en $\hat{\zeta}_* = \hat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_*$. On procède de même pour le produit ш. Les deux prolongements ne coïncident pas en général. En revanche, on en tire de nouvelles relations, que l'on ne peut pas obtenir en recombinant les anciennes ; on peut ainsi montrer que pour tout $u \in \mathfrak{h}^0$, on a $\hat{\zeta}(y ш u - y_1 * u) = 0$.

Pour $k \geqslant 0$ entier, notons $\mathcal{Z}_k$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les multizêtas de *poids* k, c'est-à-dire les $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ avec $s_1 + \cdots + s_r = k$. Zagier a fait les deux conjectures suivantes :

1. Les $\mathcal{Z}_k$ sont en somme directe, et
2. En notant $d_k = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k$, on a
$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$$
c'est-à-dire que $\sum_{k\geqslant 0} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$.

Ces conjectures sont difficiles, par exemple parce qu'il n'est déjà pas évident de voir que $\zeta(3)$ est irrationnel ou que π est transcendant. Pour simplifier le problème, on introduit des multizêtas *formelles*, qui vérifient les mêmes relations que les multizêtas réelles, mais qui ont l'avantage de ne pas être plongées dans $\mathbb{R}$.

2. Multizêtas formelles

On associe à tout mot non vide $w \in \{x, y\}^*$ un symbole formel $Z(w)$ (zêta majuscule), et on construit les algèbres libres F_n engendrées par les $Z(w)$ pour w de poids n. On convient que $F_0 = \mathbb{Q}$ et que $F_1 = 0$, et on note $F = \bigoplus_{n\geqslant 0} F_n$. On définit aussi

$$Z^*(w) = Z(\pi_y(w)) + \textstyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \langle y^n, w\rangle Z(x^{n-1}y)$$

où π_y est la projection sur les mots se terminant en y.

L'*algèbre des multizêtas formelles*, notée FZ, est le quotient de l'algèbre F par les relations

$$\begin{array}{rcll} Z(w)\,Z(w') & = & Z(w ш w') & \text{pour tous les mots } w, w' \text{ en } x \text{ et } y \text{, et} \\ Z^*(w)\,Z^*(w') & = & Z^*(w * w') & \text{pour tous les mots } w, w' \text{ en les } y_i. \end{array}$$

On appelle *espace des nouvelles multizêtas formelles* l'espace vectoriel gradué $\mathfrak{nfz} = FZ_{\geqslant 3}/FZ^2_{\geqslant 1}$. On peut aussi le voir comme le quotient de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(Z(w) \mid w \in \mathfrak{h}_{\geqslant 3})$ par le sous-espace engendré par les $Z(w ш w')$ et les $Z^*(w * w')$ pour les mots w et w' comme ci-dessus. De ce point de vue, il est gradué par le poids, en posant

$$\mathfrak{nfz}_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(Z(w) \mid w \in \mathfrak{h}_n)/\,\mathrm{Vect}(Z(w ш w'), Z^*(w * w'))$$

où l'on quotiente par les $Z(w ш w')$ pour w et w' de longeur totale n, et les $Z(w ш w')$ pour w et w' de profondeur totale n (la profondeur d'un mot étant le nombre de y qu'il contient).

3. L'algèbre de double mélange

3.1. Relations de mélange ; définition. — On dit qu'un polynôme $f \in \mathfrak{h}$ est un *élément de shuffle* si pour tous mots non vides w_1 et w_2, on a

$$\langle f, w_1 ш w_2 \rangle = 0$$

ce qui revient à demander que f est un polynôme de Lie, c'est-à-dire est dans $\mathrm{Lie}[x, y]$.

On dit que f est un *élément de stuffle* si pour tous mots non vides w_1 et w_2 en les y_i, on a

$$\langle f, w_1 * w_2 \rangle = 0.$$

Un polynôme f vérifie en fait l'une ou l'autre des relations s'il est primitif pour un certain coproduit défini sur $\mathfrak{h}$.

Soit $f \in \mathfrak{h}_n$ un polynôme homogène de poids n. On construit son *polynôme corrigé* f^* de la façon suivante : on projette f sur le sous-espace des polynômes se terminant en y, on fait le changement de variables $x^{i-1}y = y_i$ et on ajoute au polynôme obtenu le terme correctif $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \langle f, x^{n-1}y \rangle \, y_1^n$.

On appelle *algèbre de double mélange* et on note $\mathfrak{ds}$ le sous-espace de $\mathfrak{h}$ des polynômes f de poids (minimal) supérieur à 3 vérifiant les relations de double mélange, autrement dit tels que

- f vérifie les relations de shuffle, c'est-à-dire est un polynôme de Lie ;
- son corrigé f^* vérifie les relations de stuffle.

3.2. Dualité avec les multizêtas formelles. — Les définitions de l'algèbre de double mélange et de l'espace des multizêtas sont très similaires. En fait, les deux espaces vectoriels sont canoniquement duaux l'un de l'autre : il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels gradués entre $\mathfrak{ds}$ et le dual gradué $\mathfrak{nfz}^*$ de $\mathfrak{nfz}$; autrement dit, pour tout n, les espaces $\mathfrak{ds}_n$ et $\mathfrak{nfz}_n^*$ sont isomorphes.

Donnons les grandes lignes de la démonstration : par définition, $\mathfrak{nfz}_n$ est un quotient de l'espace vectoriel $Z(\mathfrak{h}_n)$, et on a un appariement non dégénéré

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathfrak{h}_n) \times \mathfrak{h}_n & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (Z(w), w') & \longmapsto & \langle Z(w), w' \rangle = \langle w, w' \rangle = \delta_{w,w'} \end{array}$$

où δ est le symbole de Kronecker, qui identifie donc canoniquement $\mathfrak{nfz}_n^*$ à l'ensemble des polynômes homogènes $f \in \mathfrak{h}_n$ orthogonaux aux $Z(w ш w')$ et aux $Z^*(w * w')$. Et il n'est pas très dur de montrer que

- un polynôme homogène $f \in \mathfrak{h}_n$ est orthogonal aux multizêtas formelles du type $Z(w ш w')$ pour w et w' non vides de longueur totale n si et seulement s'il vérifie les relations de shuffle ;

– un polynôme homogène $f \in \mathfrak{h}_n$ est orthogonal aux multizêtas formelles du type $Z^*(w * w')$ pour w et w' non vides de profondeur totale n si et seulement si f^* vérifie les relations de stuffle.

Pour le deuxième point, on se sert de la relation suivante, valable pour tout polynôme f et tout mot v :

$$\langle f, Z^*(v)\rangle = \langle f^*, Z(v)\rangle.$$

3.3. Crochet de Poisson. — Terminons par quelques remarques sur un crochet de Lie qui donne à $\mathfrak{ds}$ une structure d'algèbre de Lie graduée. Si $f \in \mathfrak{h}$, on note D_f la dérivation de $\mathfrak{h}$ définie sur les générateurs par $D_f(x) = 0$ et $D_f(y) = [y, f] = yf - fy$. On a pour tout (f, g)

$$[D_f, D_g] = D_{\{f,g\}}$$

où $\{f, g\}$ est le *crochet de Poisson* de f et g, vérifiant

$$\{f, g\} = [f, g] + D_f g - D_g f.$$

Dans sa thèse, en 2000, Racinet a montré que le crochet de Poisson stabilisait $\mathfrak{ds}$, qui est donc une algèbre de Lie. On conjecture d'ailleurs que $\mathfrak{ds}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie libre ayant un générateur en chaque poids impairs : $\mathfrak{ds} \underset{\text{conj.}}{\simeq} \mathrm{Lie}[u_3, u_5, \ldots]$.

Voici enfin une observation arithmétique sur $\mathfrak{ds}$, faite par Ihara en 1999 et encore loin d'être comprise : choisissons pour tout n impair un élément $f_n \in \mathfrak{ds}_n$ tel que $\langle f_n, x^{n-1}y\rangle = 1$ (on peut montrer qu'il y en a toujours un, mais il n'est pas canonique, et c'est d'ailleurs un problème !). Si on a bien choisi les f_n, on observe alors les congruences suivantes :

$$\{f_3, f_9\} - 3\{f_5, f_7\} \equiv 0 \ [691],$$
$$2\{f_3, f_{13}\} - 7\{f_5, f_{11}\} + 11\{f_7, f_9\} \equiv 0 \ [3617]...$$

bien sûr sans que ces combinaisons soient trivialement nulles. On reconnaît les nombres premiers qui apparaissent au numérateur des nombres de Bernoulli B_n, ou plutôt de $\frac{B_n}{n}$ puisqu'il n'y a par exemple pas de congruence modulo 11 en poids 22, alors que $B_{22} = \frac{11\cdot131\cdot593}{2\cdot3\cdot23}$. Le rationnel $\frac{B_n}{n}$ peut faire penser aux formes modulaires, et il n'est en fait pas le seul : ainsi, les coefficients $(1, -3)$ ou $(2, -7, 11)$ qui apparaissent dans les combinaisons linéaires ci-dessus se trouvent être des coefficients de polynômes des périodes de formes modulaires paraboliques. Mais ceci est une autre histoire...

* *
*

Le 12 mai 2010

S. BAUMARD • *E-mail :* `samuel.baumard@ens.fr`