

Groupes de monodromie algébriques ℓ -adiques

Martin Orr

1^{er} août 2010

Table des matières

Introduction	2
1 Catégories tannakiennes	4
2 Polygones et cocaractères	9
3 Triplets de Mumford-Tate	16
4 Tores de Frobenius	21
5 Modules filtrés	32
6 Groupes de monodromie globaux	37
7 Représentations ordinaires	42
Références	47

Introduction

À une variété abélienne X sur un corps de nombres K , on peut associer un système de représentations ℓ -adiques (ρ_ℓ, V_ℓ) où $V_\ell = H^1(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Dans ce mémoire on étudie les groupes de monodromie algébriques G_ℓ de ces représentations : ça veut dire l'adhérence de Zariski de l'image de $\rho_\ell : \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{GL}(V_\ell)$.

On conjecture que ces groupes de monodromie sont indépendants de ℓ , c'est à dire qu'il existe un groupe algébrique G_∞ sur \mathbb{Q} tel que $G_\ell = G_\infty \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ pour tout premier ℓ . Plus précisément, la conjecture de Mumford-Tate affirme que la composante neutre de G_ℓ devrait être égale à $M \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ où M est le groupe de Mumford-Tate de $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, défini via la théorie de Hodge.

Le théorème principal du mémoire (Corollaire 6.8) est la « conjecture des poids minuscules » pour ces représentations ℓ -adiques, qui affirme que la représentation tautologique ρ_ℓ de G_ℓ est définie par des couples minuscules de hauteur 1. On sait que l'énoncé équivalent est vrai pour le groupe de Mumford-Tate. Les représentations définies par des couples minuscules de hauteur 1 sont assez restreints, donc ce théorème permet de démontrer la conjecture de Mumford-Tate dans plusieurs cas. Par exemple on peut en déduire le théorème de Serre que la conjecture de Mumford-Tate est vraie si $\text{End}_{\bar{K}}(X) = \mathbb{Z}$ et $\dim X$ est impair.

La démonstration de la conjecture des poids minuscules se base sur la relation entre les cocaractères de Newton et de Hodge des groupes de monodromie ℓ -adiques. Les cocaractères de Newton sont définis en termes des tores de Frobenius, qui sont des \mathbb{Q} -tores « indépendants de ℓ » qui se trouvent dans tous les G_ℓ . Ils permettent de démontrer plusieurs résultats d'indépendance de ℓ , comme pour le rang de G_ℓ et son groupe de composantes connexes.

Dans la théorie des tores de Frobenius, on obtient des informations sur ρ_ℓ seulement pour des places de K qui ne divisent pas ℓ . Pour étudier les cocaractères de Newton aux places divisant ℓ , il faut introduire les représentations cristallines et modules filtrés. Cette théorie nous permet de construire les cocaractères de Hodge. Les cocaractères de Hodge possèdent plusieurs avantages sur les cocaractères de Newton : notamment ils n'ont que 0 et 1 comme poids.

On démontre que G_ℓ° , avec sa représentation tautologique et les cocaractères de Hodge (dans un sens faible) forment un triplet de Mumford-Tate. Ça veut dire un triplet d'un groupe réductif G , une représentation fidèle de G et un ensemble des cocaractères dont les conjugués engendrent G . On étudie la structure des triplets de Mumford-Tate en général, et on en déduit la conjecture des poids minuscules pour G_ℓ .

Comme deuxième application de la théorie cristalline on démontre que le groupe de monodromie local d'une représentation cristalline ordinaire est résoluble. Rappelons qu'on appelle ordinaire une représentation cristalline dont le polygone de Hodge coïncide avec le polygone de Newton.

Ce mémoire se base principalement sur les chapitres 1 à 5 du papier de Pink « ℓ -adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture » [Pin98]. En particulier, les comparaisons entre cocaractères et polygones et l'application à G_ℓ de l'étude des cocaractères de Hodge sont dûs à Pink. La classification des triplets de Mumford-Tate se trouve dans l'article de Serre, « Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate » [Ser79]. Serre a également étudié les tores de Frobenius et les cocaractères de Newton dans sa lettre à Ribet de janvier 1981 [Ser81]. Le scindage des modules filtrés qui définit le cocaractère de Hodge est dû à Wintenberger [Win84].

Je donne un résumé des chapitres du mémoire. Les chapitres 1, 2 et 3 sont introductifs. Le chapitre 1 regroupe, sans démonstrations, quelques résultats de la théorie des catégories tannakiennes, qui seront des outils importants dans l'étude des modules filtrés. Dans le chapitre 2, on démontre que certaines relations entre des cocaractères d'un groupe algébrique sont équivalentes à certaines relations entre leurs polygones associés. Ces résultats servent à relier les cocaractères de Hodge et de Newton d'un module filtré. Le chapitre 3 est une histoire des groupes algébriques et leurs représentations. On démontre que les triplets de Mumford-Tate sont définis par les couples minuscules de hauteur 1.

Le coeur du mémoire se trouve dans les chapitres 4 et 5. Dans le chapitre 4 on explique la théorie des tores de Frobenius. On construit les tores de Frobenius et leurs cocaractères de Newton. On étudie les classes de conjugaison des tores de Frobenius, et on démontre que le tore de Frobenius en v est conjugué à un tore maximal dans G_ℓ pour un ensemble des places v de densité 1. On en déduit quelques corollaires sur l'indépendance de ℓ de G_ℓ .

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des représentations locales p -adiques aux places qui divisent p . On introduit les modules filtrés comme un outil pour cette étude. On ne donne qu'une esquisse des idées sur les modules filtrés et les représentations cristallines dont nous avons besoin, surtout par rapport aux groupes tannakiens associés et la construction des cocaractères de Hodge et de Newton.

Enfin dans les chapitres 6 et 7 on applique la théorie des chapitres 4 et 5. Dans le chapitre 6, on l'applique aux groupes de monodromie globaux ℓ -adiques d'une variété abélienne pour démontrer la conjecture des poids minuscule. Dans le chapitre 7 on l'applique aux représentations ordinaires pour décrire plus concrètement leurs groupes de monodromie locaux, et démontrer que ces groupes sont résolubles.

Je remercie Emmanuel Ullmo pour ses conseils pendant la préparation de ce mémoire, et Arne Smeets qui l'a lu pour améliorer le français. Je remercie Anādimadhyānta sur le site web mathoverflow.net qui m'a indiqué la démonstration du Lemme 2.1.

1 Catégories tannakiennes

Une catégorie tannakienne est une catégorie k -linéaire munie de plusieurs structures algébriques, avec un foncteur dans \mathbf{Vect}_K , où K est une extension de k (souvent $K = k$). L'exemple motivant est la catégorie des représentations d'un groupe algébrique; en effet dans le cas $K = k$ (qu'on appelle le cas des catégories tannakiennes neutres), toute catégorie tannakienne neutre est isomorphe à la catégorie des représentations d'un certain groupe proalgébrique.

À part des catégories des représentations, nous devons considérer aussi la catégorie des modules filtrés sur un corps local, qui est une catégorie tannakienne non neutre. On peut également associer un groupe proalgébrique à une catégorie tannakienne non neutre, mais la relation entre le groupe et la catégorie est plus compliquée que dans le cas neutre. Pour mieux comprendre le groupe associé à une catégorie tannakienne non neutre, on peut étendre les scalaires afin qu'elle devienne neutre.

Dans ce chapitre on esquisse les résultats principaux de la théorie des catégories tannakiennes neutres, sans démonstrations, et une partie de la théorie des catégories tannakiennes non neutres, surtout la notion d'extension des scalaires.

1.1 Représentations des groupes algébriques

Soit G un groupe algébrique (affine) sur un corps k . L'idée à la base de la théorie des catégories tannakiennes est qu'on peut récupérer G de la catégorie de ses représentations, et les propriétés du groupe et de la catégorie sont liées. Expliquons d'abord comment récupérer G de sa catégorie des représentations.

On note \mathbf{Rep}_G la catégorie des représentations rationnelles de G dans un espace vectoriel de dimension finie sur k . Elle est munie d'un foncteur d'oubli $\omega^G : \mathbf{Rep}_G \rightarrow \mathbf{Vect}_k$. Elle possède aussi la structure d'une \otimes -catégorie, i.e. il y a une bonne notion de produit tensoriel des représentations de G . De plus le foncteur ω^G préserve le produit tensoriel.

Pour toute k -algèbre A , on regarde le foncteur

$$\omega^G \otimes_k A := (- \otimes_k A) \circ \omega^G : \mathbf{Rep}_k \rightarrow \mathbf{Mod}_A.$$

C'est toujours un foncteur tensoriel, et on peut regarder ses automorphismes $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega^G \otimes_k A)$, c'est à dire les transformations naturelles inversibles $u : \omega^G \otimes_k A \Rightarrow \omega^G \otimes_k A$ telles que $u_{X \otimes Y} = u_X \otimes u_Y$ pour tous $X, Y \in \mathbf{Rep}_G$.

On obtient ainsi un foncteur $\mathbf{Aut}^\otimes(\omega^G) : \mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{Grp}$, qui envoie A vers le groupe des \otimes -automorphismes de $\omega^G \otimes_k A$. On peut regarder ce foncteur comme le foncteur des points d'un k -schéma en groupes.

Chaque élément $g \in G(A)$ définit une application $\omega^G(X) \otimes_k A \rightarrow \omega^G(X) \otimes_k A$ pour toute représentation X de G , de façon naturelle, donc il y a un morphisme

évident $G \rightarrow \underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\omega^G)$. Le théorème de base de la théorie tannakienne affirme que ce morphisme est un isomorphisme, donc on peut récupérer G de $(\mathbf{Rep}_G, \omega^G)$ comme $\underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\omega^G)$.

Théorème 1.1 ([DM82] Proposition 2.8). *Le morphisme naturel $G \rightarrow \underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\omega^G)$ est un isomorphisme de schémas en groupes.*

1.2 Catégories tannakiennes neutres

Une catégorie tannakienne neutre (sur k) est essentiellement une catégorie qui est équivalente à \mathbf{Rep}_G pour un certain k -groupe proalgébrique G . Mais on va donner une définition axiomatique ; alors on pourra partir d'une catégorie quelconque qui vérifie les axiomes et puis construire le groupe proalgébrique associé.

La catégorie \mathbf{Rep}_G est munie des structures suivantes :

- (i) C'est une catégorie abélienne.
- (ii) C'est une catégorie k -linéaire : les $\mathrm{Hom}(X, Y)$ possèdent des structures de k -espaces vectoriels, et la composition est bilinéaire.
- (iii) C'est une \otimes -catégorie : il y a un foncteur bilinéaire $\otimes : \mathbf{Rep}_G \times \mathbf{Rep}_G \rightarrow \mathbf{Rep}_G$, avec des contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité.
- (iv) La structure tensorielle est *rigide* : pour chaque objet X , il existe un objet dual X^\vee et un morphisme d'évaluation $X^\vee \otimes X \rightarrow \underline{1}$ (vérifiant certaines conditions de compatibilité).

La catégorie \mathbf{Vect}_k possède également ces structures, et le foncteur $\omega^G : \mathbf{Rep}_G \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ les préserve : c'est un \otimes -foncteur exact fidèle k -linéaire.

Définition. On appelle *catégorie prétannakienne* une \otimes -catégorie abélienne k -linéaire rigide (et essentiellement petite), i.e. avec toutes les structures qu'on vient de discuter. (Cette terminologie n'est pas standard. Il n'existe pas de mot standard pour une telle catégorie.)

Si \mathbf{C} est une catégorie prétannakienne, on appelle *foncteur fibre* un \otimes -foncteur exact fidèle k -linéaire $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$.

Une *catégorie tannakienne neutre* est une catégorie prétannakienne pour laquelle il existe un foncteur fibre dans \mathbf{Vect}_k .

Soit \mathbf{C} une catégorie tannakienne neutre, et $\omega : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ un foncteur fibre. Alors on peut définir le schéma en groupes $\underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ comme dans le cas d'une catégorie des représentations. Il s'appelle le *groupe tannakien* de \mathbf{C} (mais il dépend pas seulement de \mathbf{C} , mais aussi du choix du foncteur fibre).

C'est un groupe proalgébrique (une limite projective de groupes algébriques), car c'est la limite projective de sous-groupes algébriques de $\mathrm{GL}(\omega(X))$ quand X parcourt les objets de \mathbf{C} .

Théorème 1.2 ([DM82] Théorème 2.11). *Si \mathbf{C} est une catégorie tannakienne neutre et $\omega : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ un foncteur fibre, alors \mathbf{C} est canoniquement équivalente (en tant que \otimes -catégorie abélienne k -linéaire rigide) à \mathbf{Rep}_G , et l'équivalence fait correspondre $\omega : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ et $\omega^G : \mathbf{Rep}_G \rightarrow \mathbf{Vect}_k$.*

On dit qu'une catégorie prétannakienne \mathbf{C} est *engendrée* par un objet X si tout objet de \mathbf{C} est (à isomorphisme près) une somme directe des sous-quotients de $X^{\otimes n} \otimes X^{\vee \otimes m}$ pour certains entiers positifs m et n . Si G est un groupe algébrique, alors il existe une représentation fidèle de G de dimension finie, et cette représentation engendre \mathbf{Rep}_G .

On appelle *algébrique* une catégorie prétannakienne qui est engendrée par un seul objet. Si \mathbf{C} est une catégorie tannakienne neutre algébrique, alors son groupe tannakien est algébrique, parce que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\omega(X))$ où X est un objet qui engendre \mathbf{C} . (Tout \otimes -automorphisme u du foncteur fibre ω est déterminé par u_X .)

Si \mathbf{C} est une catégorie prétannakienne et V un objet de \mathbf{C} , on écrit $((V))$ pour la sous-catégorie prétannakienne de \mathbf{C} engendrée par V : ça veut dire la plus petite sous-catégorie contenant V et stable par \otimes , duals, et sous-quotients dans \mathbf{C} .

1.3 Functorialité

Les groupes tannakiens vérifient deux propriétés de functorialité : par rapport aux foncteurs entre deux catégories tannakiennes, et par rapport aux équivalences entre deux foncteurs fibres sur la même catégorie. On discute brièvement le cas des foncteurs entre catégories tannakiennes, puis on considère le cas de deux foncteurs fibres sur une même catégorie. Dans ce cas les groupes tannakiens associés sont isomorphes si k est algébriquement clos ; en général les deux groupes sont des formes intérieures l'un de l'autre.

Supposons qu'on ait un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow H$ de k -groupes algébriques. Il induit un foncteur $\mathbf{Rep}_H \rightarrow \mathbf{Rep}_G$ qui commute avec les foncteurs d'oubli dans \mathbf{Vect}_k .

En sens inverse, soient \mathbf{C}, \mathbf{D} deux catégories tannakiennes neutres avec foncteurs fibres $\omega_{\mathbf{C}}, \omega_{\mathbf{D}}$, et $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un \otimes -foncteur k -linéaire tel que $\omega_{\mathbf{D}} \circ F = \omega_{\mathbf{C}}$. Alors tout \otimes -automorphisme u de $\omega_{\mathbf{D}}$ induit un \otimes -automorphisme uF de $\omega_{\mathbf{C}}$, donc on obtient un homomorphisme de groupes algébriques $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{\mathbf{D}}) \rightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{\mathbf{C}})$.

Proposition 1.3 ([DM82] Proposition 2.21(a)). *Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes algébriques et $F : \mathbf{Rep}_H \rightarrow \mathbf{Rep}_G$ le foncteur correspondant. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) φ est fidèlement plat.
- (ii) F est pleinement fidèle et pour tout objet $X \in \mathbf{Rep}_H$, tout sous-objet de $F(X)$ dans \mathbf{Rep}_H est isomorphe à l'image (par F) d'un sous-objet de X .

Regardons maintenant la question d'une catégorie tannakienne neutre \mathbf{C} avec deux foncteurs fibres différents $\omega, \eta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$. En effet il sera utile de permettre les catégories prétannakiennes avec les foncteurs fibres $\omega, \eta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_K$, où K est une extension finie de k .

Théorème 1.4 (Corollaire de [DM82] Theorem 3.2). *Soit \mathbf{C} une catégorie prétannakienne sur k et $\omega, \eta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ des foncteurs fibres avec K une extension finie de k . Alors les foncteurs $\omega \otimes_K \bar{K}$ et $\eta \otimes_K \bar{K}$ sont isomorphes en tant que \otimes -foncteurs $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\bar{K}}$.*

Corollaire 1.5. *Soit \mathbf{C} une catégorie prétannakienne sur k et $\omega, \eta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ des foncteurs fibres. Soit $G = \underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ et $H = \underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\eta)$ (ce sont des groupes proalgébriques sur K). Alors H est une forme intérieure de G .*

Démonstration. Rappelons qu'on dit que deux groupes proalgébriques G, H sont des *formes intérieures* l'un de l'autre s'il y a un isomorphisme $\varphi : G_{\bar{K}} \rightarrow H_{\bar{K}}$ tel que $(\sigma\varphi)^{-1} \circ \varphi$ est un automorphisme intérieur de $G_{\bar{K}}$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Pour construire φ , on choisit un isomorphisme $u : \omega \otimes_K \bar{K} \Rightarrow \eta \otimes_K \bar{K}$ (Théorème 1.4). On pose $\varphi(g) = u \circ h \circ u^{-1}$ pour tout $g \in G_{\bar{K}} = \underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\omega \otimes_K \bar{K})$.

Si $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$, on peut parler de la transformation naturelle

$$\sigma u : \omega \otimes_K \bar{K} \Rightarrow \eta \otimes_K \bar{K}.$$

Pour définir σu , on applique σ aux coefficients de chaque composante u_X ($X \in \mathbf{C}$) de la transformation.

Alors $x = (\sigma u)^{-1} \circ u$ est une transformation naturelle $\omega \otimes_K \bar{K} \Rightarrow \omega \otimes_K \bar{K}$, donc un élément de $G(\bar{K})$. L'isomorphisme $(\sigma\varphi)^{-1} \circ \varphi : G_{\bar{K}} \rightarrow G_{\bar{K}}$ est $g \mapsto xgx^{-1}$, donc un automorphisme intérieur de $G_{\bar{K}}$. \square

1.4 Catégories tannakiennes non neutres

Une catégorie tannakienne neutre sur k est munie d'un foncteur fibre dans \mathbf{Vect}_k . On aura besoin de considérer des catégories prétannakiennes avec foncteurs fibres à valeurs dans \mathbf{Vect}_K pour une extension finie K de k . Pour mieux comprendre le groupe tannakien d'un tel foncteur, on définit la notion d'extension des scalaires d'une catégorie prétannakienne.

En général, une *catégorie tannakienne* \mathbf{C} sur k est une catégorie prétannakienne sur k telle qu'il existe un \otimes -foncteur exact fidèle k -linéaire de \mathbf{C} à valeurs dans la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur un k -schéma S non vide. Dans ce mémoire, nous aurons besoin seulement du cas $S = \text{Spec } K$ où K est une extension finie de k .

Si \mathbf{C} est une catégorie tannakienne sur k avec un foncteur fibre $\omega : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_K$, alors on peut construire $H = \underline{\mathbf{Aut}}^{\otimes}(\omega)$, un groupe proalgébrique sur K , comme

dans le cas neutre. Cependant \mathbf{C} n'est pas équivalent à \mathbf{Rep}_H : en fait \mathbf{Rep}_H est une catégorie K -linéaire, mais \mathbf{C} possède seulement une structure k -linéaire. (\mathbf{Rep}_H signifie les représentations rationnelles de H dans les K -espaces vectoriels.)

Supposons que K soit une extension finie galoisienne de k . On construit une catégorie tannakienne neutre sur K notée $\mathbf{C} \otimes_k K$. Elle sera équivalente à \mathbf{Rep}_H , mais elle est définie « intérieurement » en termes de \mathbf{C} .

Pour motiver la construction, regardons le cas de \mathbf{Vect}_k . On s'attend à ce que $\mathbf{Vect}_k \otimes_k K = \mathbf{Vect}_K$, mais on veut une définition abstraite en termes de la structure prétannakienne de \mathbf{Vect}_k . Observons qu'un K -espace vectoriel est un k -espace vectoriel muni d'un homomorphisme des k -algèbres $K \rightarrow \text{End}(V)$.

Définition. Si \mathbf{C} est une catégorie prétannakienne sur k , on définit la catégorie $\mathbf{C} \otimes_k K$ comme suit :

- (i) Les objets sont les couples (V, α) où V est un objet de \mathbf{C} et $\alpha : K \rightarrow \text{End}_{\mathbf{C}}(V)$ un homomorphisme de k -algèbres.
- (ii) Les morphismes $(V, \alpha) \rightarrow (W, \beta)$ sont les morphismes $V \rightarrow W$ dans \mathbf{C} qui préservent l'action de K .

Alors $x.f = f \circ \alpha(x) = \beta(x) \circ f$ donne une structure K -linéaire sur $\mathbf{C} \otimes_k K$. On peut définir une structure tensorielle sur $\mathbf{C} \otimes_k K$ mais c'est un peu compliqué : $(V, \alpha) \otimes (W, \beta)$ n'est pas $(V \otimes W, \alpha \otimes \beta)$ mais un certain quotient de cet objet.

Il y a un foncteur évident $\omega' : \mathbf{C} \otimes_k K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ qui envoie (V, α) vers $\omega(V)$, mais ce n'est pas un foncteur fibre : il n'est pas K -linéaire. Notons que $\omega'((V, \alpha))$ est munie d'une structure de $K \otimes_k K$ -module : la première action de K provient du fait que $\omega(V)$ est un K -espace vectoriel, la deuxième de α .

Comme K/k est galoisienne, $K \otimes_k K \cong \prod_{\text{Gal}(K/k)} K$. Donc un $K \otimes_k K$ -module V se décompose comme somme directe de sous-modules indexée par $\text{Gal}(K/k)$: V_σ est le sous-espace sur lequel $(x \otimes 1).v = (1 \otimes \sigma(x)).v$. Pour donner la structure de K -espace sur V_σ , il faut faire un choix entre les deux actions de K . Mais sur V_{id} les deux actions sont identiques.

On définit le foncteur $\omega_K : \mathbf{C} \otimes_k K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ par $\omega_K((V, \alpha)) = \omega'((V, \alpha))_{\text{id}}$. On obtient un foncteur fibre, donc $\mathbf{C} \otimes_k K$ est une catégorie tannakienne neutre sur K . La proposition suivante affirme que le groupe tannakien de $(\mathbf{C} \otimes_k K, \omega_K)$ est canoniquement isomorphe à H .

Proposition 1.6 ([DM82] Proposition 3.11). *La catégorie $\mathbf{C} \otimes_k K$ est canoniquement équivalente (en tant que catégorie prétannakienne) à la catégorie \mathbf{Rep}_H des K -représentations rationnelles de $H = \underline{\text{Aut}}^\otimes(\omega)$. Sous cette équivalence, ω_K correspond au foncteur d'oubli $\mathbf{Rep}_H \rightarrow \mathbf{Vect}_K$.*

2 Polygones et cocaractères

Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps K . Si μ est un quasi-cocaractère de G , alors pour chaque représentation V de dimension finie de G on obtient les données combinatoires des poids de μ dans V . On peut ranger ces données dans un certain polygone $P_\mu(V)$ (dans le sens classique du polygone de Newton d'un polynôme). Dans ce chapitre, on montre que certaines relations entre cocaractères sont équivalentes aux inégalités entre les polygones associés.

Plus précisément, fixons un tore maximal T de G , défini sur K .

Définition. Si μ est un quasi-cocaractère de $G_{\bar{K}}$, on note S_μ l'ensemble des $G(\bar{K}) \rtimes \text{Gal}(\bar{K}/K)$ -conjugués de μ qui se factorisent à travers $T_{\bar{K}}$.

On montre que S_μ est un ensemble fini. Les théorèmes principaux affirment que si μ, ν sont deux quasi-cocaractères de G , alors :

- (i) S_ν est dans la clôture convexe de S_μ (dans l'espace de quasi-cocaractères $X_*(T_{\bar{K}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) si et seulement si $P_\nu(V)$ est au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V de dimension finie.
- (ii) $S_\nu = S_\mu$ si et seulement si $P_\nu(V)$ est au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V de dimension finie, et il existe une représentation fidèle W telle que $P_\nu(W) = P_\mu(W)$.
- (iii) S_ν est dans l'intérieur de la clôture convexe de S_μ si et seulement si : $P_\nu(V)$ est au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V de dimension finie ; de plus pour toute représentation irréductible de dimension finie, $P_\nu(V)$ est strictement au-dessus de $P_\mu(V)$ si $P_\mu(V)$ n'est pas une droite.

Plus tard, on verra que les polygones de Newton et de Hodge dans la théorie des représentations cristallines proviennent des quasi-cocaractères d'un certain groupe tannakien. Les résultats de ce chapitre nous permettront de traduire le théorème classique que le polygone de Newton est au-dessus du polygone de Hodge en une relation entre les cocaractères.

2.1 Graduations et cocaractères

Dans ce chapitre on discute les cocaractères et représentations de G . Il y a aussi une interprétation tannakienne aux (quasi-)cocaractères, en termes des graduations de la catégorie \mathbf{Rep}_G .

La catégorie $\mathbf{Gr}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Vect}_K$ des K -espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués de dimension finie est une catégorie tannakienne, avec un foncteur fibre évident. Son groupe tannakien est le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,K}$.

Concrètement, si (ρ, V) est une représentation de $\mathbb{G}_{m,K}$, alors V se décompose comme somme directe des sous-espaces $V^i = \{v \in V \mid \rho(x)v = x^i v \text{ pour } x \in K^\times\}$;

ça nous donne une \mathbb{Z} -graduation sur V . En sens inverse, si $V = \bigoplus V^i$ est un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué, alors

$$\rho(x)v = x^i v \text{ pour } v \in V^i$$

définit une représentation de $\mathbb{G}_{m,K}$.

Par la functorialité de la dualité tannakienne, un cocaractère $\mathbb{G}_{m,K} \rightarrow G$ correspond à un \otimes -foncteur K -linéaire $\mathbf{Rep}_G \rightarrow \mathbf{Gr}_{\mathbb{Z}} \mathbf{Vect}_K$ compatible avec les foncteurs fibres. On appelle un tel foncteur une \mathbb{Z} -graduation de \mathbf{Rep}_G . Concrètement, c'est la donnée d'une \mathbb{Z} -graduation de l'espace vectoriel sous-jacent de chaque représentation de G , de façon fonctorielle (par rapport aux morphismes dans \mathbf{Rep}_G) et compatible avec les produits tensoriels.

On peut considérer aussi les \mathbb{Q} -graduations. Le groupe tannakien de $\mathbf{Gr}_{\mathbb{Q}} \mathbf{Vect}_K$ est le groupe proalgébrique $\hat{\mathbb{G}}_{m,K} = \varprojlim G_n$ indexé par des entiers strictement positifs ordonnés par divisibilité, où chaque $G_n = \mathbb{G}_{m,k}$ et l'homomorphisme $G_{ab} \rightarrow G_a$ est $x \mapsto x^b$. Donc une \mathbb{Q} -graduation sur \mathbf{Rep}_G correspond à un *quasi-cocaractère* de G , c'est-à-dire un homomorphisme $\hat{\mathbb{G}}_{m,k} \rightarrow G$.

Remarquons que tout quasi-cocaractère μ se factorise à travers G_n pour un certain n (parce que l'algèbre des fonctions régulières de $\hat{\mathbb{G}}_{m,k}$ est $k[T^a : a \in \mathbb{Q}]$, mais $\mu^*(k[G])$ est contenu dans une sous-algèbre de type fini sur k , donc les dénominateurs des exposants sont bornés.) Par conséquent, l'image d'un quasi-cocaractère est contenu dans un tore maximal de G , et le groupe des quasi-cocaractères d'un tore T est isomorphe à $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ où $X_*(T)$ est le groupe des cocaractères.

2.2 L'ensemble S_{μ}

On fixe un tore maximal T de G , défini sur K . Au début du chapitre, on a défini S_{μ} (pour un quasi-cocaractère μ) comme l'ensemble des $G(\bar{K}) \rtimes \text{Gal}(\bar{K}/K)$ -conjugués de μ qui se factorise à travers $T_{\bar{K}}$. Dans cette partie, on montre que S_{μ} est une orbite pour l'action de $\Gamma = W \rtimes \text{Gal}(L/K)$ (pour une extension finie L de K), donc c'est un ensemble fini. On appliquera ce lemme plusieurs fois à travers le mémoire.

On choisit une extension finie galoisienne L de K sur laquelle T se déploie. On écrit $W = N_{G_{\bar{K}}}(T_{\bar{K}})/Z_{G_{\bar{K}}}(T_{\bar{K}})$ le groupe de Weyl de $G_{\bar{K}}$ par rapport à $T_{\bar{K}}$. Le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$ agit sur les racines de G dans $X^*(T_{\bar{K}})$, et W est engendré par les réflexions dans ces racines. Donc on obtient une action de $\text{Gal}(L/K)$ sur W .

Définition. On note Γ le produit semi-direct $W \rtimes \text{Gal}(L/K)$.

C'est un groupe fini parce que W et $\text{Gal}(L/K)$ sont finis. Il agit sur $X^*(T_{\bar{K}})$ et sur $X_*(T_{\bar{K}})$.

Lemme 2.1. *Soit μ, μ' deux cocaractères de $T_{\bar{K}}$ qui sont $G(\bar{K})$ -conjugués l'un de l'autre. Alors ils sont conjugués sous l'action du groupe de Weyl.*

Démonstration. On choisit $g \in G(\bar{K})$ tel que $\mu' = \text{Int } g \circ \mu$. Il faut démontrer qu'on peut choisir $g' \in N_{G_{\bar{K}}}(T_{\bar{K}})$ avec la même propriété.

Soit $T_{\mu'}$ l'image de μ' et H le centralisateur de $T_{\mu'}$ dans $G_{\bar{K}}$. Les deux tores $T_{\bar{K}}, gT_{\bar{K}}g^{-1}$ centralisent $T_{\mu'}$ et ils sont des tores maximaux de $G_{\bar{K}}$, donc ils sont tous les deux des tores maximaux de H . Donc ils sont conjugués dans H : il existe $h \in H$ tel que

$$hT_{\bar{K}}h^{-1} = gT_{\bar{K}}g^{-1}.$$

On pose $g' = h^{-1}g$. Alors g' normalise T et $\text{Int } g' \circ \mu = \mu'$. □

Lemme 2.2. *Supposons que μ soit un quasi-cocaractère de $T_{\bar{K}}$. Alors $S_{\mu} = \Gamma.\mu$.*

Démonstration. C'est évident que $\Gamma.\mu \subset S_{\mu}$.

Supposons que $\mu' \in S_{\mu}$. On peut supposer que μ soit un vrai cocaractère. Comme T se déploie sur L , tout cocaractère de $T_{\bar{K}}$ est défini sur L . Donc μ' est un $G(\bar{K}) \rtimes \text{Gal}(L/K)$ -conjugué de μ . En remplaçant μ' par un $\text{Gal}(L/K)$ -conjugué, on peut supposer que ce soit un $G(\bar{K})$ -conjugué de μ . On applique le Lemme 2.1 pour déduire que μ' est un W -conjugué de μ . □

Comme Γ est fini et S_{μ} est une Γ -orbite, S_{μ} est fini. Donc sa clôture convexe $\text{Conv}(S_{\mu})$ est un polytope borné Γ -invariant. Les sommets de ce polytope forment un sous-ensemble Γ -invariant de S_{μ} , donc l'ensemble des sommets est égal à S_{μ} .

2.3 Inégalité faible entre polygones

Le résultat principal sur les polygones et les cocaractères affirme que le polygone associé au cocaractère ν est au-dessus de celui associé à μ pour toute représentation V de G si et seulement si S_{ν} est contenu dans la clôture convexe de S_{μ} . Comme corollaire, $S_{\nu} = S_{\nu}$ si et seulement si les polygones coïncident pour toute représentation ; en fait il suffit qu'ils coïncident pour une seule représentation fidèle.

Proposition 2.3 ([Pin98] Théorème 1.3). *$S_{\nu} \subset \text{Conv}(S_{\mu})$ si et seulement si $P_{\nu}(V)$ est au-dessus de $P_{\mu}(V)$ pour toute représentation V de G de dimension finie.*

Démonstration. C'est géométriquement évident qu'un élément $\nu' \in X_*(T_{\bar{K}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ se trouve dans $\text{Conv}(S_{\mu})$ si et seulement si, pour tout caractère $\chi \in X^*(T_{\bar{K}})$, il existe $\mu' \in S_{\mu}$ tel que $\langle \chi, \mu' \rangle \leq \langle \chi, \nu' \rangle$.

Supposons d'abord que $S_{\nu} \subset \text{Conv}(S_{\mu})$, et soit V une représentation de G de dimension finie. Pour tout entier i avec $0 \leq i \leq \dim V$, alors la valeur du polygone

$P_\mu(V)$ en i est égal au poids minimal de μ dans $\Lambda^i V$ (car chaque poids de μ dans $\Lambda^i V$ est une somme de i poids dans V correspondant aux vecteurs propres distincts). Donc en remplaçant V par $\Lambda^i V$, il suffit de démontrer que le poids minimal de μ dans V est inférieur ou égal à celui de ν .

Soit χ un poids de T dans V tel que $\langle \chi, \nu \rangle$ est le poids minimal de ν dans V . Car $S_\nu \subset \text{Conv}(S_\mu)$, on peut choisir $\gamma(\mu) \in S_\mu$ (avec $\gamma \in G(\bar{K}) \rtimes \text{Gal}(\bar{K}/K)$) tel que $\langle \chi, \gamma(\mu) \rangle \leq \langle \chi, \nu \rangle$. Or le poids minimal de μ dans V est inférieur ou égal à $\langle \gamma^{-1}(\chi), \mu \rangle$, donc inférieur ou égal à $\langle \chi, \nu \rangle$.

Supposons maintenant que $P_\nu(V)$ soit au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V . Soit $\nu' \in S_\nu$. Pour démontrer que $\nu' \in \text{Conv}(S_\mu)$, il suffit de démontrer que pour tout $\chi \in X^*(T_{\bar{K}})$, il existe $\mu' \in S_\mu$ tel que $\langle \chi, \mu' \rangle \leq \langle \chi, \nu' \rangle$.

Donc on se donne un caractère χ de $T_{\bar{K}}$. On peut choisir une base du système des racines de G par rapport à T de sorte que χ soit un poids dominant. Alors on prend la représentation irréductible V de G avec χ comme plus haut poids. Les poids de T dans V sont tous dans la clôture convexe de $\Gamma \cdot \chi$ où $\Gamma = W \rtimes \text{Gal}(\bar{K}/K)$, donc le poids minimal de μ dans V est $\langle \gamma(\chi), \mu \rangle$ pour un certain $\gamma \in \Gamma$. Maintenant

$$\begin{aligned} \langle \chi, \gamma^{-1}(\mu) \rangle &= \langle \gamma(\chi), \mu \rangle \\ &= \text{le poids minimal de } \mu \text{ dans } V \\ &\leq \text{le poids minimal de } \nu \text{ dans } V \\ &= \text{le poids minimal de } \nu' \text{ dans } V \\ &\leq \langle \chi, \nu' \rangle \end{aligned}$$

donc on peut choisir $\mu' = \gamma^{-1}(\mu) \in S_\mu$. □

Proposition 2.4 ([Pin98] Théorème 1.5). $S_\nu = S_\mu$ si et seulement si $P_\nu(V)$ est au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V de G de dimension finie, et il existe une représentation fidèle W de G telle que $P_\nu(W) = P_\mu(W)$.

Démonstration. En appliquant la Proposition 2.3 dans les deux sens, on obtient que $\text{Conv}(S_\nu) = \text{Conv}(S_\mu)$ si et seulement si $P_\nu(V) = P_\mu(V)$ pour toute représentation V de G . En regardant les sommets, $\text{Conv}(S_\nu) = \text{Conv}(S_\mu)$ si et seulement si $S_\nu = S_\mu$.

Il reste à démontrer que si $P_\nu(V)$ est au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V et il existe une représentation fidèle W de G telle que $P_\nu(W) = P_\mu(W)$, alors $P_\nu(V) = P_\mu(V)$ pour toute représentation V . L'idée principale est que comme W est fidèle, toute représentation irréductible de G est un sous-quotient de $W^{\otimes m} \otimes W^{\vee \otimes n}$ pour certains m, n . Donc il suffit de montrer que :

- (i) $P_\mu(W^{\otimes m} \otimes W^{\vee \otimes n}) = P_\nu(W^{\otimes m} \otimes W^{\vee \otimes n})$ pour tout m, n .
- (ii) Si $P_\mu(V) = P_\nu(V)$, alors les polygones P_μ et P_ν coïncident pour toute sous-représentation et tout quotient de V .

- (iii) Si les polygones P_μ et P_ν coïncident pour tout sous-quotient irréductible de V , alors ils coïncident pour V .

Chaque étape est un jeu des polygones assez facile : pour (ii), rappelons qu'on suppose que P_ν soit au-dessus de P_μ pour toute représentation de G . \square

2.4 Inégalité stricte entre polygones

Si on ne suppose pas seulement que $P_\nu(V)$ soit au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V , mais aussi que $P_\nu(V)$ soit strictement au-dessus quand V est irréductible et $P_\mu(V)$ n'est pas une droite, alors on peut fortifier la Proposition 2.3 et déduire que S_ν est contenu dans l'intérieur de $\text{Conv}(S_\mu)$. La réciproque est aussi vraie.

Dans cet énoncé, il faut faire attention à la définition de l'intérieur de un ensemble $C \subset V = X_*(T_{\bar{K}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: si la dimension de C est strictement inférieure à celle de V alors l'intérieur dans le sens usuel de la topologie est vide. Donc on regarde W , le plus petit espace affine de V qui contient C , et on définit $\text{Int}(C)$ comme l'intérieur de C par rapport à la topologie de W . Parce que $C = \text{Conv}(S_\mu)$ est un polytope, $\text{Int}(C)$ admet une description simple comme C moins ses faces.

On peut aussi décrire $\text{Int}(\text{Conv}(S_\mu))$ algébriquement : c'est l'ensemble de $\nu \in V$ tel que, pour tout caractère $\chi \in X^*(T_{\bar{K}})$:

- (i) ou bien $\langle \chi, \nu \rangle = \langle \chi, \mu' \rangle$ pour tout $\mu' \in S_\mu$,
- (ii) ou bien il existe $\mu' \in S_\mu$ tel que $\langle \chi, \nu \rangle > \langle \chi, \mu' \rangle$.

L'hypothèse (i) est vérifiée si $\langle \chi, - \rangle$ est constant sur l'espace affine W , (ii) sinon.

Définition. On dit que le polygone P est *strictement au-dessus* de P' si P est au-dessus de P' et ils ne se rencontrent qu'en l'origine et éventuellement en l'extrémité à droite.

Proposition 2.5 ([Pin98] Théorème 1.4). $S_\nu \subset \text{Int}(\text{Conv}(S_\mu))$ si et seulement si : $P_\nu(V)$ est au-dessus de $P_\mu(V)$ pour toute représentation V de G de dimension finie ; de plus pour toute représentation irréductible de dimension finie, $P_\nu(V)$ est strictement au-dessus de $P_\mu(V)$ si $P_\mu(V)$ n'est pas une droite.

Démonstration. Supposons d'abord que l'hypothèse sur les polygones soit vérifiée. On reprend l'argument de la Proposition 2.3 : soit $\nu' \in S_\nu$ et $\chi \in X^*(T_{\bar{K}})$, et on prend la représentation irréductible V de G avec χ comme plus haut poids. Si $P_\nu(V)$ est strictement au-dessus de $P_\mu(V)$, alors on trouve μ' comme dans la Proposition 2.3 tel que $\langle \chi, \mu' \rangle < \langle \chi, \nu' \rangle$. Sinon $P_\nu(V) = P_\mu(V)$ est une droite. Donc tous les poids de ν et μ dans V sont égaux, donc $\langle \chi, \nu' \rangle = \langle \chi, \mu' \rangle$ pour tout $\mu' \in S_\mu$.

Le sens inverse est plus difficile : supposons que $S_\nu \subset \text{Int}(\text{Conv}(S_\mu))$, et soit V une représentation irréductible de G . Si $P_\mu(V)$ est une droite, alors la Proposition 2.3 pour V et V^\vee implique que $P_\mu(V) = P_\nu(V)$.

Sinon, la Proposition 2.3 implique que $P_\nu(V)$ est au-dessus de $P_\mu(V)$ donc si $P_\nu(V)$ n'est pas strictement au-dessus de $P_\mu(V)$, il faut que les deux se rencontrent en un sommet (i, r) de $P_\nu(V)$. Soit W le sous-espace de V qui correspond aux pentes de $P_\nu(V)$ à gauche de ce sommet. On va montrer que W est une sous- G -représentation, définie sur K , ce qui contredit l'irréductibilité de V .

Pour l'étape finale du preuve, il faudra supposer que G soit réductif, donc on se ramène dans ce cas. Comme V est irréductible et de dimension au moins 2 (car $P_\mu(V)$ n'est pas une droite), le radical unipotent U agit trivialement sur V (le Théorème de Lie-Kolchin). Donc on peut remplacer G par le groupe réductif G/U . (La démonstration dans [Pin98] n'est pas correcte parce qu'il omet de faire cette réduction.)

W est une somme des espaces propres pour l'action de $T_{\bar{K}}$ dans V , donc c'est une sous- $T_{\bar{K}}$ -représentation. Supposons que l'action de $T_{\bar{K}}$ sur $\Lambda^i W$ soit donnée par le caractère χ . Le poids $\langle \chi, \nu \rangle$ de ν dans $\Lambda^i W$ est r , la hauteur de $P_\nu(V)$ en i .

Si $\langle \chi, - \rangle$ n'est pas constant sur S_μ , alors il existe $\mu' \in S_\mu$ tel que $\langle \chi, \mu' \rangle < \langle \chi, \nu \rangle$. (On applique ici l'hypothèse que ν soit dans l'intérieur de $\text{Conv}(S_\mu)$.) Mais (i, r) est un point (pas nécessairement un sommet) du polygone $P_\mu(V)$, donc le poids minimal de μ dans $\Lambda^i V$ est r . Alors on obtient une contradiction via

$$r \leq \langle \chi, \mu' \rangle < \langle \chi, \nu \rangle = r.$$

Donc en effet $\langle \chi, \mu' \rangle = \langle \chi, \nu \rangle = r$ pour tout $\mu' \in S_\mu$, donc $\langle \chi, \nu' \rangle = r$ pour tout $\nu' \in S_\nu$ (car tout ν' est dans l'espace affine engendré par S_μ).

Donc le poids de $\nu_0 = \sum_{\nu' \in S_\nu} \nu'$ dans $\Lambda^i W$ est $r \cdot \#S_\nu$. C'est de multiplicité 1 comme poids de ν_0 dans $\Lambda^i V$, car r est le poids minimal, de multiplicité 1 pour tout ν' . Donc $\Lambda^i W$ est stable par l'action du centralisateur de ν_0 dans G .

Or ν_0 est stable par $\Gamma = W \rtimes \text{Gal}(L/K)$. Comme G est réductif, la seule partie de $X_*(T_{\bar{K}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ fixée par l'action du groupe de Weyl est celle qui correspond au centre de G . Donc ν_0 est central dans G , et $\Lambda^i W$ est stable par G . De plus ν_0 est défini sur K , donc $\Lambda^i W$ l'est aussi. Enfin W est une sous- G -représentation de V définie sur K . \square

2.5 Sous groupes engendrés par des cocaractères

Si μ est un quasi-cocaractère de $G_{\bar{K}}$, on note H_μ le plus petit sous-groupe distingué de G défini sur K et tel que μ se factorise à travers $H_{\mu, \bar{K}}$. En d'autres termes, $H_{\mu, \bar{K}}$ est engendré par les images des $G(\bar{K}) \rtimes \text{Gal}(\bar{K}/K)$ -conjugués de μ . Quand S_μ est petit, on s'attend à ce que H_μ soit petit. Cette proposition sera utile pour l'étude des représentations ordinaires.

Proposition 2.6. *Si S_μ est réduit à un élément, alors H_μ est résoluble.*

Démonstration. Les sous-groupes distingués de G définis sur K correspondent aux sous-espaces de $X_*(T_{\bar{K}})$ stables par $\Gamma = W \rtimes \text{Gal}(L/K)$. Donc S_μ engendre l'espace des cocaractères de $T \cap H_\mu$, un tore maximal de H_μ (en tant que sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de $X_*(T_{\bar{K}})$).

Comme S_μ est réduit à un élément, $X_*(T \cap H_\mu)$ est de dimension 1 (ou 0 si μ est trivial), engendré par μ . Le groupe de Weyl agit trivialement sur μ , donc sur $X_*(T \cap H_\mu)$. Donc H_μ est résoluble. \square

3 Triplets de Mumford-Tate

Dans ce chapitre, on classe les *triplets de Mumford-Tate de poids* $\{0, 1\}$. Un triplet de Mumford-Tate est un groupe réductif muni d'une représentation et d'un ensemble de cocaractères tels que les cocaractères engendrent le groupe. On montre que tous les facteurs presque simples d'un tel groupe sont de type classique et que les plus hauts poids de la représentation sont minuscules. On donne une liste complète des groupes simples et représentations irréductibles qui peuvent apparaître.

Cela nous intéresse parce que le groupe de Mumford-Tate d'une variété abélienne, avec sa représentation tautologique et le cocaractère qui correspond à la décomposition de Hodge, forment un triplet de Mumford-Tate fort de poids $\{0, 1\}$. Une partie importante de ce mémoire sera la démonstration du fait que les groupes de monodromie ℓ -adiques d'une variété abélienne forment des triplets de Mumford-Tate faibles de poids $\{0, 1\}$.

- Définition.** (a) Un *triplet de Mumford-Tate faible* est (G, ρ, Ψ) où G est un groupe réductif sur un corps K de caractéristique 0, ρ est une représentation fidèle de G et Ψ est un ensemble des cocaractères de $G_{\bar{K}}$ tels que les images des $G(\bar{K})$ -conjugués des éléments de Ψ engendrent $G_{\bar{K}}$.
- (b) Un *triplet de Mumford-Tate fort* est un triplet de Mumford-Tate faible où Ψ est une seule orbite sous l'action $\text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Les *poids* d'un triplet de Mumford-Tate sont les entiers qui sont poids de $\rho \circ \mu$, pour $\mu \in \Psi$. Les triplets qui nous intéressent sont ceux dont les seuls poids sont 0 et 1.

Serre [Ser79] a classifié les triplets de Mumford-Tate forts de poids 0 et 1. Comme on explique ici, son argument reste valable pour les triplets faibles. L'hypothèse supplémentaire d'être un triplet fort n'est utile que si on suppose de plus que la représentation ρ soit géométriquement irréductible. Dans ce cas il implique que le groupe dérivé $[G, G]$ soit presque simple sur K , mais on n'étudie pas les triplets forts dans ce mémoire.

3.1 Poids minuscules

Soit X un espace vectoriel de dimension r sur \mathbb{Q} et R un système de racines irréductible et réduit engendrant X . On fixe une base $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ de R . On note W le groupe de Weyl.

Définition. Un ensemble S de poids dans X est *saturé* si pour tout $\lambda \in S$, toute racine $\alpha \in R$, et tout entier i entre 0 et $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$, on a $\lambda - i\alpha \in S$.

Définition. Un *poids minuscule* est un poids dominant non nul $\lambda \in X$ tel que $W.\lambda$ est saturé.

Un *couple minuscule* est un couple (λ, μ) où λ est un poids minuscule dans X et μ un copoids minuscule dans X^\vee .

Lemme 3.1 ([Bou75] VIII 7.3 Proposition 6). *Un poids dominant non nul λ est minuscule si et seulement si $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \{0, \pm 1\}$ pour toute racine $\alpha \in R$.*

Démonstration. D'abord, soit λ un poids minuscule et $\alpha \in R$. On peut supposer que α soit positif (sinon, on remplace α par $-\alpha$).

$|\lambda - i\alpha|^2$ est une fonction convexe de i , et

$$|\lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha|^2 = |s_\alpha \lambda|^2 = |\lambda|^2$$

donc $|\lambda - i\alpha|^2 < |\lambda|^2$ si $0 < i < \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$.

Cependant, comme $W.\lambda$ est saturé, pour tout entier i tel que $0 < i < \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$, on a $\lambda - i\alpha \in W.\lambda$. Donc $|\lambda - i\alpha|^2 = |\lambda|^2$, ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc il n'existe pas d'entiers strictement entre 0 et $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ i.e. $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \{0, \pm 1\}$.

En sens inverse, soit λ un poids dominant tel que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \{0, \pm 1\}$ pour toute racine α . Soit w un élément du groupe de Weyl et α une racine. Comme $\langle w\lambda, \alpha^\vee \rangle \in \{0, \pm 1\}$, il n'y a pas d'entiers strictement entre 0 et $\langle w\lambda, \alpha^\vee \rangle$. Donc $W.\lambda$ est trivialement saturé. \square

Remarque. Il y a plusieurs autres caractérisations des poids minuscules : voir [Bou75] VIII 7.3. En particulier, tout poids minuscule est un poids fondamental. Si la plus grande racine de R^\vee s'écrit $n_1\alpha_1^\vee + \dots + n_r\alpha_r^\vee$, alors le poids fondamental ω_i est minuscule si et seulement si $n_i = 1$. Cela nous permet d'écrire facilement une liste des poids minuscules de chaque système de racines irréductible et réduit ; une telle liste se trouve dans [Bou75] VIII 7.3.

Soit w_0 l'élément de longueur maximal du groupe de Weyl (l'unique élément de W qui transforme B en $-B$, [Bou68] VI 1.6 Corollaire 3).

Définition. Si $\lambda \in X$ et $\mu \in X^\vee$, on définit l'*hauteur* du couple (λ, μ) comme

$$\ell(\lambda, \mu) = \langle \lambda, \mu \rangle - \langle w_0\lambda, \mu \rangle.$$

Lemme 3.2. *Si $\lambda \in X$ est un poids dominant non nul et $\mu \in X^\vee$ un copoids dominant non nul, alors $\ell(\lambda, \mu)$ est un entier strictement positif.*

Démonstration. On peut écrire $\lambda - w_0\lambda$ comme somme des éléments de la forme $\beta - s_\alpha\beta = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ où β est un poids abstrait et α une racine, donc $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ est un entier. Donc $\lambda - w_0\lambda$ est une combinaison entière des racines, donc $\ell(\lambda, \mu) = \langle \lambda - w_0\lambda, \mu \rangle$ est un entier.

Comme λ et μ sont dominant non nuls, $\langle \lambda, \mu \rangle > 0$. Le poids $-w_0\lambda$ est aussi dominant non nul, donc $\langle -w_0\lambda, \mu \rangle > 0$. Donc $\ell(\lambda, \mu) > 0$. \square

TABLE 1 – Couples minuscules de hauteur 1

Système de racines	Poids minuscule	Copoids minuscule	Représentation	Dimension
A_r	$\omega_1 (\omega_r)$	$\omega_s^\vee, 1 \leq s \leq r$	standard	$r + 1$
A_r	$\omega_s, 1 \leq s \leq r$	$\omega_1^\vee (\omega_r^\vee)$	$\Lambda^s(\text{standard})$	$\binom{r+1}{s}$
B_r	ω_r	ω_1^\vee	spinorielle	2^r
C_r	ω_1	ω_r^\vee	standard	$2r$
D_r	ω_1	$\omega_r^\vee (\omega_{r-1}^\vee)$	standard	$2r$
D_r	$\omega_r (\omega_{r-1})$	ω_1^\vee	semi-spinorielle	2^{r-1}

Les poids et copoids indiqués entre parenthèses sont redondants puisqu'ils se transforment en un autre couple minuscule via un automorphisme du système de racines.

Les composantes irréductibles des triplets de Mumford-Tate sont définies par des couples minuscules de hauteur 1. Une liste de tels couples, extraite de [Ser79], se trouve dans la Table 3.1. La numérotation des poids fondamentaux est celle des Planches de [Bou68].

Définition. On dit qu'une représentation irréductible ρ d'un groupe algébrique réductif G est *définie par des poids minuscules* si pour tout facteur presque simple G_i de G , le plus haut poids de $\rho|_{G_i}$ est minuscule ou nul.

On dit que ρ est *définie par des couples minuscules de hauteur 1* si pour tout facteur presque simple G_i de G , ou bien le plus haut poids λ_i de $\rho|_{G_i}$ est nul, ou bien il existe un quasi-cocaractère μ_i de G_i tel que (λ_i, μ_i) est un couple minuscule de hauteur 1.

Si ρ est une représentation fidèle du groupe réductif G définie par des couples minuscules de hauteur 1, alors il faut que tout facteur presque simple de G soit classique (car il n'existe pas de couples minuscules de hauteur 1 pour les systèmes de racines exceptionnels).

3.2 Classification de triplets de Mumford-Tate

Soit (G, ρ, Ψ) un triplet de Mumford-Tate faible de poids $\{0, 1\}$, sur le corps K . On montre que ρ est définie par des couples minuscules de hauteur 1.

Les conditions d'être un triplet faible ou d'être définie par des couples minuscules de hauteur 1 reste vraies après une extension du corps de base, donc on peut supposer que K soit algébriquement clos. (Cette réduction n'est pas valable si on se restreint aux triplets de Mumford-Tate forts, donc dans [Ser79] il fallait toujours tenir compte de l'action du groupe de Galois.)

Fixons un tore maximal T de G . On écrit $X = X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ l'espace des caractères de T et $Y = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ l'espace des cocaractères de T . On note $R \subset X$ le système des racines de G , et $R^\vee \subset Y$ son dual.

Soit $G = ZG_1 \cdots G_s$ la décomposition de G comme produit presque direct du centre et des facteurs presque simples. Elle correspond aux décompositions orthogonales

$$X = X_c \oplus \bigoplus_{i=1}^s X_i \quad \text{et} \quad Y = Y_c \oplus \bigoplus_{i=1}^s Y_i.$$

Si $\lambda \in X$, on écrit λ_i, λ_c pour les projections de λ sur X_i ($1 \leq i \leq s$) et sur X_c . D'une façon similaire on écrit μ_i et μ_c pour $\mu \in Y$.

En remplaçant les cocaractères dans Ψ par des conjugués, on peut supposer qu'ils se factorisent à travers T et qu'ils soient dominants par rapport à R^\vee .

Lemme 3.3 ([Ser79] Lemme 3). *Les poids de ρ engendrent X .*

Les W -conjugués des copoids dans Ψ engendrent Y .

Démonstration. Les poids de ρ engendrent X car ρ est fidèle.

$W.\Psi$ engendre Y parce que les sous-espaces de Y stables par W sont en bijection avec les sous-groupes distingués de G , et G est le seul sous-groupe distingué de G qui contient les images des éléments de Ψ . \square

Lemme 3.4 ([Ser79] Lemme 4).

(a) *Si $\alpha \in R$ est une racine et $\omega \in X$ un poids de ρ , alors $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle \in \{0, \pm 1\}$.*

(b) *Si $\alpha \in R$ est une racine et $\mu \in \Psi$, alors $\langle \alpha, \mu \rangle \in \{0, \pm 1\}$.*

Démonstration. Supposons qu'on se donne une racine α , un poids ω de ρ et un copoids $\mu \in W.\Psi$.

Soit s_α la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à α . Alors

$$\langle \omega, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \mu \rangle = \langle \omega, \mu \rangle - \langle s_\alpha \omega, \mu \rangle$$

et les deux termes à droite sont des poids de $\rho \circ \mu$, donc chacun est 0 ou 1. Donc

$$\langle \omega, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \mu \rangle \in \{0, \pm 1\}.$$

Si on se donne une racine α et un poids ω comme dans (a), alors grâce au lemme 3.3 on peut trouver $\mu \in W.\Psi$ tel que $\langle \alpha, \mu \rangle \neq 0$. Les deux produits $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle$ et $\langle \alpha, \mu \rangle$ sont des entiers, donc $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle \in \{0, \pm 1\}$.

C'est le même argument pour (b). \square

Corollaire 3.5 ([Ser79] Lemme 5). *Si λ est un plus haut poids de ρ , alors λ_i est minuscule ou nul pour tout i . Si $\mu \in \Psi$, alors μ_i est minuscule ou nul pour tout i .*

Démonstration. On applique les lemmes 3.1 and 3.4. □

Lemme 3.6 ([Ser79] Lemme 6). *Si λ est un plus haut poids de ρ , et $1 \leq j \leq s$ tel que $\lambda_j \neq 0$, alors il existe $\mu \in \Psi$ tel que $\ell(\lambda_j, \mu_j) = 1$.*

Démonstration. Comme $W.\Psi$ engendre Y , il existe $\mu \in \Psi$ tel que $\mu_j \neq 0$.

Comme les X_i et X_c sont deux à deux orthogonaux, et w_0 préserve la décomposition,

$$\ell(\lambda, \mu) = \ell(\lambda_c, \mu_c) + \sum_{i=1}^s \ell(\lambda_i, \mu_i).$$

Le groupe de Weyl agit trivialement sur X_c , donc $\lambda_c = w_0 \lambda_c$ et $\ell(\lambda_c, \mu_c) = 0$.

Par le Lemme 3.2, tous les termes $\ell(\lambda_i, \mu_i)$ sont des entiers positifs. Cependant $\ell(\lambda, \mu) \in \{0, \pm 1\}$ car $\langle \lambda, \mu \rangle, \langle w_0 \lambda, \mu \rangle \in \{0, 1\}$. Donc au plus un des termes $\ell(\lambda_i, \mu_i)$ vaut 1, et les autres sont nuls.

Or λ_j, μ_j sont dominants non nuls donc $\ell(\lambda_j, \mu_j) > 0$ (Lemme 3.2).

Donc $\ell(\lambda_j, \mu_j) = 1$. De plus, $\ell(\lambda_i, \mu_i) = 0$ si $i \neq j$. □

Proposition 3.7. *Si (G, ρ, Ψ) est un triplet de Mumford-Tate faible de poids $\{0, 1\}$, alors tout facteur presque direct de G est de type A, B, C ou D et toute composante irréductible de ρ est définie par des couples minuscules de hauteur 1.*

Démonstration. Le Corollaire 3.5 et le Lemme 3.6 impliquent que ρ est définie par des couples minuscules de hauteur 1.

Pour tout facteur presque direct G_i , il existe un plus haut poids λ de ρ tel que $\lambda_i \neq 0$ (car ρ est fidèle). Alors λ_i fait partie d'un couple minuscule de hauteur 1 pour G_i . Mais les systèmes de racines exceptionnels ne possèdent pas de couples minuscules de hauteur 1 (Table 3.1), donc G_i est de type classique. □

4 Tores de Frobenius

Serre a introduit les tores de Frobenius dans [Ser81] pour étudier l'indépendance de ℓ des groupes de monodromie algébriques des représentations ℓ -adiques associées à une variété projective lisse sur un corps de nombres K . En particulier on démontre que le rang de G_ℓ , le groupe des composantes connexes, et le caractère formel de sa représentation tautologique ne dépend pas de ℓ .

Pour presque toute place v de K , on définit un *tore de Frobenius*, qui est un tore algébrique sur \mathbb{Q} . Grâce à la compatibilité stricte des représentations, il y a un conjugué du tore de Frobenius dans chaque groupe de monodromie G_ℓ . Le théorème principal affirme que, si on suppose K suffisamment grand, alors pour un ensemble de places de densité 1, ce tore est maximal dans G_ℓ .

On définit un quasi-cocaraactère distingué du tore de Frobenius, qui s'appelle (d'après Pink) le cocaraactère de Newton. Ses $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués engendrent l'espace des cocaraactères du tore de Frobenius. On emploie ce cocaraactère dans la démonstration du théorème principal sur les tores de Frobenius ; de plus il jouera un rôle important plus tard dans la démonstration de la conjecture des poids minuscules.

4.1 Le cadre

Soit K un corps de nombres, et X une variété projective lisse sur K . Fixons un entier positif d . Alors pour tout premier rationnel ℓ , la cohomologie étale ℓ -adique $H^d(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est une \mathbb{Q}_ℓ -représentation continue de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. On va considérer la semisimplifiée de cette représentation, notée (V_ℓ, ρ_ℓ) .

Remarque. Si X est une variété abélienne, $H^d(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est elle-même semisimple.

Définition. Le *groupe de monodromie algébrique ℓ -adique* de V_ℓ est l'adhérence de Zariski dans $\text{GL}(V_\ell)$ de l'image de ρ_ℓ .

Les représentations ρ_ℓ forment un système strictement compatible. Cela veut dire qu'il y a un ensemble fini S des places de K tels que, si v est une place non-archimédienne de K qui n'est pas dans $S \cup S_\ell$, alors ρ_ℓ est non ramifiée en ℓ et le polynôme caractéristique de $\rho_\ell(\text{Frob}_v)$ est à coefficients dans \mathbb{Q} et ne dépend pas de ℓ ([Ser77] 2.1). On note ici S_ℓ l'ensemble des places de K qui divisent ℓ .

Lemme 4.1 ([Pin98] Théorème 3.3). *Soit $\xi \in \bar{\mathbb{Q}}$ une valeur propre de $\rho_\ell(\text{Frob}_v)$, où $v \notin S \cup S_\ell$.*

- (i) *Pour toute place non-archimédienne w de $\bar{\mathbb{Q}}$ dont le caractère résiduel n'est pas celui de v , $|\xi|_w = 1$.*

(ii) Pour toute place non-archimédienne w de $\bar{\mathbb{Q}}$ du même caractère résiduel que v , $0 \leq \text{ord}_w(\xi) \leq d \cdot [k_v : \mathbb{F}_p]$ et $(\dim V_\ell) \cdot \text{ord}_w(\xi)$ est un entier.

(iii) Pour toute valeur absolue archimédienne $|\cdot|_\infty$ de $\bar{\mathbb{Q}}$, $|\xi|_\infty = \sqrt{\#k_v}$.

Exemple. À travers ce chapitre, je vais considérer l'exemple d'une courbe elliptique E sur \mathbb{Q} . La représentation $H^1(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est isomorphe au dual du module de Tate $T_\ell(E) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

Si E n'a pas de multiplications complexes, Serre ([Ser68] Thm IV.2.2) a montré que le groupe de monodromie algébrique G_ℓ est $\text{GL}_{2, \mathbb{Q}_\ell}$ tout entier. C'est connexe et de rang 2.

Si E a des multiplications complexes, disons par le corps quadratique imaginaire K , alors $\rho_\ell : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ se factorise à travers $K^\times \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Le groupe de monodromie G_ℓ est isomorphe à

$$\text{Res}_{\mathbb{Q}_\ell}^{K \otimes \mathbb{Q}_\ell} \mathbb{G}_m \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

Il a deux composantes connexes et la composante neutre est un tore de rang 2 ([Ser64b] Théorème 5).

Concrètement, pour E à multiplications complexes par $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, on peut choisir une base de V_ℓ telle que

$$G_\ell = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -db & a \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & -a \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell) \right\}.$$

Supposons que p soit un premier rationnel de bonne réduction pour E . Si $l \neq p$, alors le polynôme caractéristique de $\rho_\ell(\text{Frob}_p)$ est $X^2 - a_p X + p$ pour un entier a_p qui vérifie $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$. Il y a deux cas très différents : p divise a_p (*réduction supersingulière*) et p ne divise pas a_p (*réduction ordinaire*). Remarquons que dans le cas de réduction supersingulière, si $p > 3$ alors $a_p = 0$ grâce à la borne sur $|a_p|$.

4.2 Définition des tores de Frobenius

Soit v une place non-archimédienne de K qui n'est pas dans S . On note $\pi_{v, \ell}$ la partie semisimple de $\rho_\ell(\text{Frob}_v)$.

Remarque. Si X est une variété abélienne et v ne divise pas ℓ , alors $\rho_\ell(\text{Frob}_v)$ est déjà semisimple. On conjecture que $\rho_\ell(\text{Frob}_v)$ est toujours semisimple quand v ne divise pas ℓ ([Kat94] p. 27).

Soit $T'_{v, \ell}$ le plus petit sous-groupe algébrique de G_ℓ qui contient $\pi_{v, \ell}$. Chaque $T'_{v, \ell}$ est un groupe diagonalisable sur \mathbb{Q}_ℓ . On va construire une forme T_v des $T'_{v, \ell}$, définie sur \mathbb{Q} , qui ne dépend pas de ℓ .

Si v ne divise pas ℓ , alors le polynôme caractéristique de $\pi_{v, \ell}$ est à coefficients dans \mathbb{Q} et ne dépend pas de ℓ . Donc on peut prendre un élément semisimple de $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ avec le même polynôme caractéristique que $\pi_{v, \ell}$ pour tout ℓ . C'est défini à $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ -conjugaison près. Fixons un représentant t_v de cette classe.

Définition. Soit T_v le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ qui contient t_v . C'est un groupe diagonalisable. Le *tore de Frobenius* en v est le tore T_v° .

T_v° est un tore « abstrait » sur \mathbb{Q} . Mais t_v est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué à $\pi_{v,\ell}$, donc T_v est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué à $T'_{v,\ell}$ pour tout premier $\ell \neq \mathrm{car} k_v$.

Exemple. Supposons que E soit une courbe elliptique sur \mathbb{Q} et p est un premier de bonne réduction pour E .

Le polynôme caractéristique du Frobenius $X^2 - a_p X + p$ a deux racines complexes distinctes α et $\bar{\alpha}$. L'élément t_p est un conjugué rationnel de $\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. Donc T_p se déploie sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Si la réduction de E en p est ordinaire, il n'y a pas de relations multiplicatives entre α et $\bar{\alpha}$ donc $\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ engendre le tore diagonal dans $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}(\alpha)}$, et l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ échange les deux éléments du diagonal. Donc

$$T_p \cong \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}(\alpha)} \mathbb{G}_m.$$

C'est un tore de rang 2.

Si la réduction de E en p est supersingulière et $p > 3$, alors $a_p = 0$ donc le polynôme caractéristique est $X^2 + p$ avec racines $\pm i\sqrt{p}$. On peut prendre

$$t_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}(i\sqrt{p})}$, $\begin{pmatrix} i\sqrt{p} & \\ & -i\sqrt{p} \end{pmatrix}$ engendre $\left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \mid a^2 = b^2 \right\}$. Il a deux composantes connexes, et la composante neutre est le groupe des homothéties. Donc T_p° est le groupe des homothéties (qui est de rang 1) et $T_p = T_p^\circ \cup t_p T_p^\circ$.

Si $p = 2$ ou 3 , il se peut que $a_p = \pm p$. Alors T_p° est toujours le groupe des homothéties mais le nombre de composantes connexes de T_p est 4 ou 6.

4.3 Cocaractères de Newton

On va définir un quasi-cocaractère de $T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}$ qui tient compte des valuations p -adiques des valeurs propres de Frobenius, où $p = \mathrm{car} k_v$. (Les valuations ℓ -adiques pour $\ell \neq p$ ne sont pas intéressants, car ils sont toujours 0.) Il s'appelle le *cocaractère de Newton* parce que son polygone associé est (à un facteur constant près) le polygone de Newton classique du polynôme caractéristique de t_v .

On démontre que l'espace des cocaractères $X_*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est engendré par les $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués du cocaractère de Newton. On appliquera cette proposition pour démontrer que les tores de Frobenius T_v° (quand on fait varier v , pour une variété X fixée) appartiennent à un nombre fini de classes conjugaison sous $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}})$. Plus tard, on l'appliquera pour démontrer que les cocaractères de Hodge engendrent G_ℓ .

Définition. Le *cocaractère de Newton* de T_v est l'unique quasi-cocaractère ν_v de $T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}$ tel que

$$\langle \chi, \nu_v \rangle = \frac{\text{ord}_p(\chi(t_v))}{[k_v : \mathbb{F}_p]} = \frac{v(\chi(t_v))}{v(\#k_v)}$$

pour tout caractère χ de $T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}$.

Ce quasi-cocaractère existe parce que $X_*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{Q}$ est le dual de $X^*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{Q}$. On choisit la normalisation (division par $[k_v : \mathbb{F}_p]$) afin que les poids du cocaractère de Newton soient dans $[0, d]$.

En termes plus concrètes, choisissons une base de $\bar{\mathbb{Q}}^n$ de vecteurs propres de t_v . Le groupe multiplicatif T_v est diagonal par rapport à cette base. Soient ξ_1, \dots, ξ_n les valeurs propres correspondantes de t_v , et soit

$$e_i = \frac{\text{ord}_p(\xi_i)}{[k_v : \mathbb{F}_p]} = \frac{v(\xi_i)}{v(\#k_v)}.$$

Alors ν_v est le quasi-cocaractère

$$z \mapsto \text{diag}(z^{e_1}, z^{e_2}, \dots, z^{e_n}).$$

Proposition 4.2 ([Ser81] p. 9, [Pin98] Prop 3.5). *Les $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués de ν_v engendrent l'espace vectoriel $X_*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Sinon, il y a un élément non torsion $\chi \in X^*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}})$ tel que

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } \sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad \langle \chi, \sigma \nu_v \rangle = 0 \\ &\text{donc pour tout } \sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad v(\sigma^{-1} \chi(t_v)) = 0. \end{aligned}$$

Donc pour toute place w de $\bar{\mathbb{Q}}$ de caractéristique résiduel p , $|\chi(t_v)|_w = 1$.

La valeur $\chi(t_v)$ est dans le sous-groupe de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ engendré par les valeurs propres de t_v , donc par le Lemme 4.1 $|\chi(t_v)|_w = 1$ pour toute autre place non-archimédienne de $\bar{\mathbb{Q}}$.

Le Lemme 4.1 implique que toutes les valeurs absolues archimédiennes de $\chi(t_v)$ sont égales ; mais leur produit est 1 par le formule de produit des valeurs absolues.

Donc toutes les valeurs absolues de $\chi(t_v)$ sont 1, donc c'est une racine d'unité. Si $\chi(t_v)^k = 1$, alors $\chi^k = 1$ (parce que t_v engendre un sous-groupe dense de T_v). Cela contredit l'hypothèse que χ n'est pas de torsion. \square

Exemple. Dans le cas de réduction ordinaire, le polynôme $X^2 - a_p X + p$ a deux racines distinctes mod p , donc le premier p est scindé dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, où α est une racine complexe de ce polynôme. Plus précisément $(p) = (\alpha)(\bar{\alpha})$.

Choisissons le prolongement de ord_p qui correspond à (α) . Alors $\text{ord}_p(\alpha) = 1$, $\text{ord}_p(\bar{\alpha}) = 0$. Quand on diagonalise sur $\mathbb{Q}(\alpha)$, le cocaractère de Newton est

$z \mapsto \begin{pmatrix} z & \\ & 1 \end{pmatrix}$ et son $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ -conjugué est $z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & z \end{pmatrix}$. Ces deux cocaractères engendrent $X_*(T_{p,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Dans le cas de réduction supersingulière, les deux valeurs propres ($\pm i\sqrt{p}$ si $a_p = 0$) sont de valuation p -adique $\frac{1}{2}$. Donc le (quasi-)cocaractère de Newton est $z \mapsto \begin{pmatrix} z^{1/2} & \\ & z^{1/2} \end{pmatrix}$. Il est fixé par $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, et il engendre $X_*(T_{p,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

4.4 Classes de conjugaison des tores de Frobenius

Proposition 4.3 ([Ser81] p. 10). *Pour une variété X fixée, les tores de Frobenius T_v° n'appartiennent qu'à un nombre fini de classes de $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}})$ -conjugaison.*

Démonstration. Notons d'abord que ν_v n'appartient qu'à un nombre fini de classes de $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}})$ -conjugaison : la classe de conjugaison de ν_v est déterminée par ses poids dans la représentation tautologique, qui sont des nombres rationnels entre 0 et d de dénominateur au plus n .

Maintenant l'idée est que ν_v détermine T_v° , via la Proposition 4.2. Cependant la classe de conjugaison de ν_v ne détermine pas la classe de conjugaison de T_v° , parce que l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ne commute pas avec la conjugaison par un élément de $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}})$, donc il faut faire un petit argument pour conclure.

Fixons une classe de conjugaison C de quasi-cocaractères de $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}})$. Il faut démontrer que parmi les v tels que $\nu_v \in C$, les tores T_v° n'appartiennent qu'à un nombre fini de classes de conjugaison.

Si $\nu_v \in C$, alors tous les $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués de ν_v sont dans C parce qu'ils ont tous les mêmes poids. Donc $X_*(T_v^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est engendré par un ensemble de quasi-cocaractères dans C .

Fixons un tore maximal T_0 de GL_n , défini sur \mathbb{Q} . On peut prendre un $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}})$ -conjugué T'_v de T_v° dans T_0 . Alors $X_*(T'_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est engendré par un sous-ensemble de $(X_*(T_{0,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cap C$.

Mais $(X_*(T_{0,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cap C$ est fini par le Lemme 2.1, donc il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour T'_v , donc pour la classe de $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}})$ -conjugaison de T_v° . \square

Remarque. Les classes possibles des tores de Frobenius ne dépendent que de la dimension et des nombres de Betti de X . Donc il y a un nombre fini de classes de conjugaison possibles pour toutes les variétés abéliennes de dimension donnée.

Exemple. On a déjà vu que, pour une courbe elliptique sur \mathbb{Q} , les tores de Frobenius se trouvent dans deux classes de conjugaison dans $\text{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}})$: ou bien la classe des tores maximaux, ou bien la classe du tore des homothéties.

4.5 Maximalité des tores de Frobenius

Le théorème principal sur les tores de Frobenius affirme que, si G_ℓ est connexe, alors T_v est conjugué à un tore maximal de G_ℓ si v est dans un ensemble de premiers v de K de densité 1. Cet argument apparaît dans [Ser81] partie 5 et [Chi92] Corollaire 3.8, mais je présente ici une démonstration plus détaillée.

La restriction que G_ℓ doit être connexe n'est pas vraiment un problème, parce qu'on peut toujours se ramener à ce cas en élargissant K : $\rho_\ell^{-1}(G_\ell^\circ)$ est un sous-groupe ouvert distingué de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$, donc son corps fixé est une extension finie galoisienne K^{conn} de K . Si on remplace K par K^{conn} , et donc ρ_ℓ par $\rho_\ell|_{\text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{conn}})}$, G_ℓ devient G_ℓ° . (On verra dans la prochaine partie que K^{conn} ne dépend pas de ℓ .)

Pour la démonstration du théorème principal, on démontre qu'il y a un ensemble fini B de sous-groupes fermés de G_ℓ , chacun strictement contenu dans un tore maximal, tel que si T_v n'est pas conjugué à un tore maximal, alors un conjugué de $\pi_{v,\ell}$ est dans un des éléments de B . La réunion des conjugués de ces sous-groupes n'est pas dense dans G_ℓ , et on conclut par le théorème de Chebotarev.

L'ensemble B devrait contenir un représentant de chaque classe de conjugaison de tores de Frobenius qui ne sont pas maximaux. Cependant il faut prendre des groupes un peu plus grand, car il se peut que $\pi_{v,\ell}$ ne soit pas dans la composante neutre de T_v .

Dans cette démonstration, on applique plusieurs résultats de la théorie des groupes algébriques dans la démonstration se trouvent dans la partie 4.7.

Lemme 4.4. *Il y a un ensemble fini B de sous-groupes de G_ℓ , chacun strictement contenu dans un tore maximal de G_ℓ , tel que si T_{v,\mathbb{Q}_ℓ} n'est pas conjugué à un tore maximal de G_ℓ alors un conjugué de $\pi_{v,\ell}$ est dans un des éléments de B .*

Démonstration. Par le Lemme 4.10, on peut choisir un nombre fini des représentants T_1, \dots, T_h de toutes les classes de $G_\ell(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugaison des tores maximaux de G_ℓ .

Pour chaque $i \in \{1, \dots, h\}$, on note A_i l'ensemble des sous-tores T de T_i tels que :

- (a) $T \neq T_i$,
- (b) T est défini sur \mathbb{Q}_ℓ ,
- (c) pour une certaine place v , T est $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ -conjugué à T_v° .

Si $T \in A_i$, on note \tilde{T} la réunion des cosets de T dans T_i qui sont définis sur \mathbb{Q}_ℓ et dont les images dans T/T_i sont de torsion. L'ensemble $(T/T_i)(\mathbb{Q}_\ell)_{\text{tors}}$ est fini (l'ensemble des points de torsion définis sur \mathbb{Q}_ℓ d'un groupe diagonalisable est toujours fini). Donc \tilde{T} est une réunion finie des cosets de T . En particulier, \tilde{T} est un sous-groupe fermé de T_i de composante neutre T , donc c'est strictement contenu dans T_i .

Soit

$$B_i = \{\tilde{T} \mid T \in A_i\} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_i B_i.$$

Par la Proposition 4.3, chaque ensemble A_i n'intersecte qu'un nombre fini des classes de $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ -conjugaison. Par le même argument que dans la démonstration du Lemme 2.1, chaque classe de $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ -conjugaison des tores n'a qu'un nombre fini des représentants contenus dans T_i . Donc les ensembles A_i , B_i et B sont finis.

Supposons maintenant que v soit une place de K telle que T_v n'est pas un tore maximal. Il reste à démontrer qu'un conjugué de $\pi_{v,\ell}$ est dans un élément de B .

L'élément $\pi_{v,\ell} = \rho_\ell(\mathrm{Frob}_v)^{\mathrm{ss}}$ est semisimple et G_ℓ est connexe, donc $\pi_{v,\ell}$ est dans un tore maximal. Donc il y a un $G_\ell(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué $\pi'_{v,\ell}$ de $\pi_{v,\ell}$ dans T_i pour un certain i .

Soit T' le sous-groupe algébrique minimal de T_i contenant $\pi'_{v,\ell}$. Par définition, T'° est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué de T_v° . Car T_v n'est pas maximal (donc $T'^\circ \neq T_i$), il en résulte que $T'^\circ \in A_i$.

Or le coset $\pi'_{v,\ell}T'^\circ$ est défini sur \mathbb{Q}_ℓ et son image dans T_i/T'° est de torsion (son ordre est égal au nombre des composantes connexes de T') donc $\pi'_{v,\ell} \in \tilde{T}$. Par définition $\tilde{T} \in B$. \square

Lemme 4.5. *Il y a un ouvert dense U de $G_{\ell,\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$, stable par conjugaison, tel que, si $t \in U(\mathbb{Q}_\ell)$, alors aucun élément de B ne contient un $G_\ell(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ -conjugué de t .*

Démonstration. Pour tout $\tilde{T} \in B$, posons

$$F_{\tilde{T}} = \text{l'adhérence de } \bigcup_{g \in G_\ell(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)} g\tilde{T}g^{-1}.$$

Par le lemme 4.11, $F_{\tilde{T}}$ n'est pas G_ℓ tout entier. Donc la réunion $\bigcup_{\tilde{T} \in B} F_{\tilde{T}}$ est une réunion finie des fermés stricts de G_ℓ , donc c'est un fermé strict (G_ℓ est irréductible).

On peut prendre $U = G_\ell - \bigcup_{\tilde{T} \in B} F_{\tilde{T}}$. \square

Théorème 4.6 ([Ser81] p. 12-13). *Si G_ℓ est connexe, alors il y a un ensemble de premiers v de K de densité 1 pour lesquels T_{v,\mathbb{Q}_ℓ} est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué à un tore maximal de G_ℓ .*

Démonstration. Par les lemmes 4.4 et 4.5, il y a un ouvert dense $U \subset G_{\ell,\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ tel que, si $\pi_{v,\ell} \in U$, alors T_{v,\mathbb{Q}_ℓ} est conjugué à un tore maximal de G_ℓ .

Soit U' l'ensemble des éléments semisimples de U . Alors U' contient un ensemble ouvert dense : comme G_ℓ est réductif, les sous groupes de Cartan coïncident avec les tores maximaux ([Bor91] 13.17 Corollaire 2(c)) et pour tout groupe algébrique linéaire la réunion des sous groupes de Cartan contient un ensemble ouvert

dense ([Bor91] Théorème 11.10), donc l'ensemble des éléments semisimple de G_ℓ contient un ouvert dense, qu'on intersecte avec U .

Si $\rho_\ell(\text{Frob}_v) \in U'$, alors $\pi_{v,\ell} = \rho_\ell(\text{Frob}_v)$ donc $\pi_{v,\ell} \in U$ et $T_{v,\mathbb{Q},\ell}$ est conjugué à un tore maximal.

Enfin par le théorème de Cebotarev, l'ensemble des places v de K telles que $\rho_\ell(\text{Frob}_v) \in U'$ est de densité 1 ([Ser68] I.2.2 Corollaire 2(b)). \square

Exemple. Si E est une courbe elliptique sur \mathbb{Q} , on a vu que G_ℓ est de rang 2 pour tout ℓ et que T_p est de rang 2 si et seulement si E a une réduction ordinaire en p . Donc on conclut que, si E n'a pas de multiplications complexes, l'ensemble des premiers rationnels de réduction ordinaire est de densité 1. (Serre a démontré ce résultat dans [Ser64b] Théorème 6, Corollaire 1.)

Si E a des multiplications complexes, alors la réduction en un premier rationnel p est ordinaire si et seulement si p se décompose dans K , le corps de multiplications complexes ([Ser64b] Théorème 5(iii)). Donc l'ensemble de premiers rationnels pour lesquels T_v est conjugué à un tore maximal est de densité $\frac{1}{2}$. Ce n'est pas une contradiction car G_ℓ n'est pas connexe. Si on considère K comme le corps de base, afin que G_ℓ soit connexe, alors il y a réduction ordinaire en toute place de K de degré 1, i.e. pour un ensemble de densité 1.

4.6 Indépendance de ℓ

On peut appliquer l'existence de tores maximaux conjugués aux tores Frobenius pour démontrer que plusieurs propriétés de G_ℓ sont indépendantes de ℓ . Dans cette partie, on démontre que le rang de G_ℓ , le caractère formel de la représentation tautologique et le corps K^{conn} ne dépendent pas de ℓ . Après avoir démontré que le rang de G_ℓ ne dépend pas de ℓ , on peut fortifier le Théorème 4.6 sur les tores de Frobenius qui sont conjugués aux tores maximaux de G_ℓ pour conclure qu'il y a un ensemble commun de places de densité 1 qui marche pour tout ℓ .

Définition. Soient T un tore et ρ une représentation de T . Le *caractère formel* de ρ est la somme formelle dans $\mathbb{Z}[X^*(T)]$

$$\sum_{\chi \in X^*(T)} \text{mult}_\rho(\chi) \cdot \chi,$$

où $\text{mult}_\rho(\chi)$ est la multiplicité de χ comme poids de ρ .

Si T est un sous-groupe de $\text{GL}(V)$, le caractère formel de la représentation tautologique V ne change pas quand on remplace T par un $\text{GL}(V)$ -conjugué T' (pourvu qu'on identifie $X^*(T)$ à $X^*(T')$ via la conjugaison).

Si G est un groupe algébrique linéaire et ρ une représentation de G , le *caractère formel* de ρ est le caractère formel de $\rho|_T$ pour un tore maximal T de G . Il ne dépend pas du choix de tore maximal car ils sont tous conjugués dans G_ℓ .

Lemme 4.7 ([Pin98] Corollaire 3.8, [Ser85] 2.2.4). *Le rang et le caractère formel de G_ℓ (dans sa représentation tautologique) ne dépendent pas de ℓ .*

Démonstration. En remplaçant K par une extension finie, on peut supposer que G_ℓ et $G_{\ell'}$ soient connexes ; cela ne change pas les composantes neutres de G_ℓ et $G_{\ell'}$, donc il ne change pas les rangs et les caractères formels.

Soient ℓ, ℓ' deux premiers rationnels.

Par le Théorème 4.6, il existe une place v de K (en fait, un ensemble de places de densité 1) telle que T_{v, \mathbb{Q}_ℓ} est conjugué à un tore maximal de G_ℓ et $T_{v, \mathbb{Q}_{\ell'}}$ est conjugué à un tore maximal de $G_{\ell'}$.

Donc les rangs de G_ℓ et $G_{\ell'}$ sont égaux à la dimension de T_v , et les caractères formels sont égaux au caractère formel de la représentation tautologique (sur \mathbb{Q}^n) de T_v . \square

Lemme 4.8 ([Pin98] Théorème 3.6). *Le corps K^{conn} (la plus petite extension de K où G_ℓ devient connexe) ne dépend pas de ℓ .*

Démonstration. Soient ℓ, ℓ' deux nombres premiers, et supposons que G_ℓ soit connexe. Il suffit de démontrer que $G_{\ell'}$ est connexe (donc $K_{\ell'}^{\text{conn}} \subset K_\ell^{\text{conn}}$).

Il y a un ensemble de densité 1 de places v de K telles que T_{v, \mathbb{Q}_ℓ} est conjugué à un tore maximal de G_ℓ ; en particulier T_v est un tore. Pour des tels v , le plus petit sous-groupe algébrique de $G_{\ell'}$ contenant $\pi_{v, \ell'}$ est connexe (car ce sous-groupe est conjugué à $T_{v, \mathbb{Q}_{\ell'}}$) donc $\pi_{v, \ell'} \in G_{\ell'}^\circ$.

Par le théorème de Chebotarev, l'ensemble des places v telles que $\pi_{v, \ell'} \in G_{\ell'}^\circ$ est de densité $1/[G_{\ell'} : G_{\ell'}^\circ]$, donc $G_{\ell'} = G_{\ell'}^\circ$. \square

Définition. On note V_{\max} l'ensemble de places v de K telles que X est de bonne réduction en v et telles que pour tout ℓ , si v ne divise pas ℓ , alors T_{v, \mathbb{Q}_ℓ} est $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué à un tore maximal de G_ℓ .

Corollaire 4.9 ([Pin98] Théorème 3.7). *Si G_ℓ est connexe, alors V_{\max} est de densité 1.*

Démonstration. Choisissons un premier ℓ quelconque.

On démontre que $V_{\max} - \{v \mid v \text{ divise } \ell\}$ est égal à l'ensemble des places v qui ne divisent pas ℓ et telles que T_{v, \mathbb{Q}_ℓ} est $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué à un tore maximal de G_ℓ , pour ce premier ℓ fixé. Ensuite on applique le Théorème 4.6.

Si v est une place de K telle que T_{v, \mathbb{Q}_ℓ} est $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué à un tore maximal de G_ℓ , alors pour tout ℓ' tel que v ne divise pas ℓ' , $T_{v, \mathbb{Q}_{\ell'}}$ est $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_{\ell'})$ -conjugué à un tore dans $G_{\ell'}$. Ce tore doit être maximal dans $G_{\ell'}$ car les rangs de G_ℓ et $G_{\ell'}$ sont égaux. \square

Exemple. On a vu que, pour une courbe elliptique sur \mathbb{Q} , G_ℓ est toujours de rang 2. Un tore maximal est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué au tore diagonal, donc le caractère formel est $1 \cdot \chi_1 + 1 \cdot \chi_2$ où $\{\chi_1, \chi_2\}$ est la base standard de $X^*(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)$.

Le corps K^{conn} (pour tout ℓ) est \mathbb{Q} si E n'a pas de multiplications complexes, et le corps de multiplications complexes s'il en a.

Enfin V_{\max} est l'ensemble des places de K^{conn} où E est de réduction ordinaire.

4.7 Résultats sur les groupes algébriques

Dans cette partie, je présente quelques lemmes sur les groupes algébriques nécessaires pour la démonstration du Théorème 4.6.

Lemme 4.10 ([Ser64a] III.4.4 Corollaire 1). *Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur \mathbb{Q}_ℓ . Les tores maximaux de G définis sur \mathbb{Q}_ℓ forment un nombre fini de classes pour la conjugaison par les éléments de $G(\mathbb{Q}_\ell)$.*

Démonstration. La propriété essentielle de \mathbb{Q}_ℓ est qu'il est un corps de type (F) au sens de [Ser64a] III.4; c'est à dire qu'il est parfait et pour tout entier n il n'existe qu'un nombre fini de sous-extensions de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ de degré n sur \mathbb{Q}_ℓ .

On prend un tore maximal T de G défini sur \mathbb{Q}_ℓ . On pose $H = N_G(T)$. Les tores maximaux de G forment un espace homogène G/H sous l'action de G par conjugaison.

Les classes de tores maximaux définis sur \mathbb{Q}_ℓ sont en bijection avec le quotient de $(G/H)(\mathbb{Q}_\ell)$ par $G(\mathbb{Q}_\ell)$, mais par la suite exacte longue de cohomologie galoisienne ce quotient s'injecte dans $H^1(\mathbb{Q}_\ell, H)$.

Or car \mathbb{Q}_ℓ est de type (F), un argument cohomologique montre que $H^1(\mathbb{Q}_\ell, H)$ est fini pour tout groupe algébrique linéaire H sur \mathbb{Q}_ℓ ([Ser64a] III.4.3 Théorème 4). \square

Lemme 4.11. *Soit G un groupe algébrique linéaire (sur un corps K). Si H est un sous-groupe fermé strictement contenu dans un tore maximal de G , alors $\bigcup_{g \in G(\bar{K})} gHg^{-1}$ n'est pas dense dans G .*

Démonstration. Ce lemme apparaît sans démonstration comme le Lemme 3.7.3 de [Chi92]. La démonstration est une modification de la démonstration du Lemme 11.9 de [Bor91].

On peut supposer sans perte de généralité que K soit algébriquement clos.

On regarde les morphismes

$$G \times G \xrightarrow{\alpha} G \times G \xrightarrow{\beta} (G/H) \times G \xrightarrow{\gamma} G$$

où $\alpha(x, y) = (x, xyx^{-1})$, $\beta(x, y) = (xH, y)$ et γ est la projection sur le deuxième facteur.

On pose

$$M = \beta(\alpha(G \times H)) = \{(xH, z) \mid z \in xHx^{-1}\}.$$

Alors $\gamma(M) = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$, donc il faut montrer que $\gamma(M)$ n'est pas dense dans G . On va faire cela par un calcul de dimensions : $\dim M = \dim G$ mais les fibres de $\gamma|_M$ sont de dimension strictement positive.

Le morphisme α est un isomorphisme de schémas, donc $\alpha(G \times H)$ est fermé dans $G \times G$.

Le morphisme quotient $G \rightarrow G/H$ est un morphisme fermé, donc M est fermé dans $G \times H$. On regarde M comme sous-schéma de H avec la structure de sous-schéma fermé réduit.

La projection $M \subset G/H \times G \rightarrow G/H$ est surjective et les fibres sont de dimension $\dim H$ (chaque fibre est isomorphe à xHx^{-1} pour un certain $x \in G$).

Donc $\dim M = \dim G/H + \dim H = \dim G$.

Donc pour montrer que $\gamma|_M$ n'est pas dominant, il suffit de montrer que les fibres de $\gamma|_M$ sont de dimension strictement positive.

Si $z \in \gamma(M)$, on peut choisir g tel que $z \in gHg^{-1}$.

Maintenant si T est un tore maximal contenant H , T est contenu dans $N_G(H)$.

Donc si $x \in gT$, alors $z \in xHx^{-1}$ donc $(xH, z) \in M$.

Donc la fibre de $\gamma|_M$ en z est de dimension au moins $\dim(T/H) \geq 1$. □

5 Modules filtrés

On a démontré que G_ℓ contient des tores de Frobenius maximaux et que les espaces de cocaractères des tores de Frobenius sont engendrés par les $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués du cocaractère de Newton. Les cocaractères de Newton ne suffisent pas pour notre but de démontrer que G_ℓ fait partie d'un triplet de Mumford-Tate : il ne sont que des quasi-cocaractères, et on ne peut pas contrôler sur leurs poids.

Donc on introduit des nouveaux cocaractères, les cocaractères de Hodge. Ils sont des vrais cocaractères, et leurs poids correspondent à la décomposition de la structure de Hodge associé à X . En particulier, dans le cas de H^1 d'une variété abélienne, les cocaractères de Hodge sont de poids 0 ou 1, ce qui nous permettra d'appliquer la classification de triplets de Mumford-Tate.

Pour construire les cocaractères de Hodge, on regarde la restriction de ρ_p au groupe de décomposition d'une place de caractéristique résiduel p . Cette restriction est ramifiée, donc elle est plus difficile à étudier que les représentations non ramifiées ($\ell \neq p$) qu'on a traitées dans le dernier chapitre.

Donc on introduit les *modules filtrés admissibles*, des objets d'algèbre linéaire qui forment une catégorie tannakienne équivalente à celle de certaines représentations p -adiques du groupe de décomposition. Un objet filtré est muni de deux structures : une filtration de Hodge et un morphisme semi-linéaire de Frobenius.

On définit un cocaractère de Newton d'un module filtré via le morphisme de Frobenius ; dans les cas qui nous intéressent, il correspond au cocaractère de Newton du tore de Frobenius qu'on a déjà défini. On définit aussi un cocaractère de Hodge via la filtration de Hodge du module filtré. Pour relier les deux, on fait appel au résultat classique de la théorie des modules filtrés, qui affirme que le polygone de Newton est au-dessus du polygone de Hodge.

5.1 Modules filtrés

Soit F une extension finie non ramifiée de \mathbb{Q}_p et σ l'automorphisme de Frobenius de F . On définit les module filtrés et modules filtrés admissibles sur F . La catégorie des modules filtrés admissibles est équivalente, en tant que catégorie prétannakienne, à la catégorie des représentations cristallines de $\text{Gal}(\bar{F}/F)$.

Définition. Un *module filtré* ([Fon79] 1.2.1) sur F est la donnée de :

- (i) un F -espace vectoriel M de dimension finie ;
- (ii) une filtration descendante $\text{Fil}^i M$ de M par des sous- F -espaces, zéro ou M en dehors d'un nombre fini des termes ;
- (iii) une bijection σ -linéaire $f_M : M \rightarrow M$.

On ne demande pas que f_M préserve la filtration.

On note \mathbf{MF}_F la catégorie des modules filtrés sur F . Les morphismes sont les morphismes des F -espaces vectoriels qui préservent la filtration et commutent avec les morphismes de Frobenius. C'est une catégorie \mathbb{Q}_p -linéaire, mais pas F -linéaire grâce à la σ -linéarité des morphismes de Frobenius. Il y a une structure tensorielle rigide sur \mathbf{MF}_F .

Fontaine ([Fon82] chapitre 5) a construit un \otimes -foncteur \mathbb{Q}_p -linéaire \mathbf{D} de la catégorie des représentations continues de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ dans la catégorie des modules filtrés. On l'appelle parfois le « foncteur mystérieux ».

Définition. On dit qu'une \mathbb{Q}_p -représentation V de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ est *cristalline* si $\dim_F \mathbf{D}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. On note $\mathbf{Rep}^{\mathrm{cris}}$ la catégorie des \mathbb{Q}_p -représentations cristallines de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$.

On dit qu'un module filtré est *admissible* s'il est isomorphe à $\mathbf{D}(V)$ pour une certaine représentation cristalline V . On note \mathbf{MF}_F^a la catégorie des modules filtrés admissibles.

Les catégories $\mathbf{Rep}^{\mathrm{cris}}$, \mathbf{MF}_F^a sont des catégories tannakiennes, et le foncteur \mathbf{D} induit une équivalence $\mathbf{Rep}^{\mathrm{cris}} \rightarrow \mathbf{MF}_F^a$ ([Fon82] Théorème 5.2). Il préserve la structure prétannakienne, mais il ne commute pas avec les foncteurs fibres.

L'exemple le plus important d'une représentation cristalline est la cohomologie étale p -adique d'une variété projective lisse X sur F ayant bonne réduction. Dans ce cas, le module filtré admissible $\mathbf{D}(H^d(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_p))$ est la cohomologie cristalline $H_{\mathrm{cris}}^d(\tilde{X}/\mathfrak{o}_F) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ où \tilde{X} est une réduction de X sur le corps résiduel.

Exemple. Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p ayant bonne réduction. Alors $M = H_{\mathrm{cris}}^1(E/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est un module filtré sur \mathbb{Q}_p .

Si E a une réduction ordinaire ([Ber01] Exemple II.3.2), alors le polynôme caractéristique de Frobenius se décompose sur \mathbb{Q}_p (ses racines sont 0 et $a_p \bmod p$ qui sont distincts, donc on peut appliquer le lemme de Hensel). Soient α, β les valeurs propres du Frobenius telles que $\alpha \equiv 0 \bmod p$, $\beta \equiv a_p \bmod p$.

Alors il y a une base $\{e_0, e_1\}$ de M et un élément $x \in \mathbb{Q}_p$ tels que

$$f_M = \begin{pmatrix} \beta & x \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^1 M \text{ est engendré par } e_1.$$

Les autres termes $\mathrm{Fil}^i M$ de la filtration sont M si $i \leq 0$, zéro si $i \geq 2$. Ici $x = 0$ si et seulement si E est à multiplications complexes.

Si E a une réduction supersingulière (démonstration de [JK01] Théorème 3.3) et $p > 3$ alors le polynôme caractéristique de Frobenius est $X^2 + p$. Il y a une base $\{e_0, e_1\}$ de M telle que

$$f_M = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^1 M \text{ est engendré par } e_1.$$

5.2 Groupes tannakiens des modules filtrés

On construit des groupes tannakiens associés aux modules filtrés et aux représentations cristallines. Quand un module filtré correspond à une représentation cristalline via le foncteur mystérieux, alors les deux groupes tannakiens associés sont des formes intérieures l'un de l'autre. Cela nous permet de construire des cocaractères associés aux modules filtrés, puis de les transférer aux groupes de monodromie.

Soit V une représentation cristalline et $M = \mathbf{D}(V)$ le module filtré associé.

La catégorie $\mathbf{Rep}^{\text{cris}}$ est tannakienne neutre, avec le foncteur fibre évident dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$. Soit $((V))$ la sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{Rep}^{\text{cris}}$ engendré par V , et H_V le groupe tannakien de $((V))$. C'est un groupe algébrique défini sur \mathbb{Q}_p . H_V est l'adhérence de Zariski de l'image de $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ dans $\text{GL}(V)$.

La catégorie \mathbf{MF}_F^a est une catégorie tannakienne non neutre sur \mathbb{Q}_p , munie du foncteur fibre évident dans \mathbf{Vect}_F . Soit $((M))$ la sous-catégorie tannakienne de \mathbf{MF}_F^a engendré par M , et H_M le groupe tannakien de $((M))$. C'est un groupe algébrique défini sur F .

La restriction de \mathbf{D} est une équivalence $((V)) \rightarrow ((M))$, donc les groupes tannakiens $H_V \times_{\mathbb{Q}_p} F$ et H_M sont des formes intérieures l'un de l'autre (Corollaire 1.5). Cependant ils ne sont pas nécessairement isomorphes, car en général \mathbf{D} ne commute pas avec les foncteurs fibres.

Fixons un isomorphisme $u : \omega_M \otimes_F \bar{\mathbb{Q}}_p \rightarrow \omega_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p$ des foncteurs fibres sur la clôture algébrique, donc un isomorphisme de groupes algébriques $\alpha : H_{M, \bar{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$. L'isomorphisme u est défini à composition avec un élément de $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ près, donc α est défini à un automorphisme intérieur de $H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ près.

Exemple. Si E est une courbe elliptique de bonne réduction ordinaire, alors il y a un sous-espace $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -invariant de $T_p E$ de rang 1 : les points qui deviennent zéro dans la réduction de E sur le corps résiduel. Comme $V = H_{\text{ét}}^1(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$ est le dual de $T_p E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, il y a une sous-représentation $X \subset V$ de dimension 1.

Si E n'a pas de multiplications complexes, alors H_V est le sous-groupe de Borel de $\text{GL}_{2, \mathbb{Q}_p}$ qui envoie X dans lui-même. Si E a des multiplications complexes, alors il y a un sous-espace invariant supplémentaire à X , et H_V est un tore déployé de rang 2 ([Ser68] IV.A.2.4).

On peut calculer H_M via la Proposition 7.4. Si E n'a pas de multiplications complexes, alors H_M est le sous-groupe de Borel qui préserve la droite engendrée par e_0 (dans la base employée dans la partie précédente). Si E a des multiplications complexes, alors H_M est le tore diagonal par rapport à cette base. Donc dans ces cas H_M est isomorphe à H_V sur K .

Si E est une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p de bonne réduction supersingulière et $p > 3$, alors il a des multiplications complexes formelles ([JK01] Théorème 3.3)

donc H_V° est un tore non déployé de rang 2 sur \mathbb{Q}_p , et H_V est le normalisateur de H_V° , qui a deux composantes connexes ([Ser68] IV.A.2.2). Dans ce cas, $H_M = T \cup \begin{pmatrix} 0 & p \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T$ où T est le tore diagonal dans la base $\{e_0, e_1\}$. Donc H_M est une forme intérieure de H_V .

5.3 Cocaractères de Newton des modules filtrés

On construit un quasi-cocaractère ν_M de H_M qui s'appelle le *cocaractère de Newton* de M . Ce cocaractère est défini en termes de la structure du module filtré, mais on verra plus tard que dans le cas de la cohomologie p -adique d'une variété, le cocaractère correspondant de H_V est conjugué au cocaractère de Newton du tore de Frobenius qu'on a défini dans la partie 4.3.

Soit $m = [F : \mathbb{Q}_p]$. Pour tout module filtré N , f_N est une bijection σ -linéaire $N \rightarrow N$, donc f_N^m est un automorphisme du F -espace vectoriel N . Cet automorphisme est fonctoriel et compatible avec la structure tensorielle, donc il donne un automorphisme du foncteur fibre de \mathbf{MF}_F^a . En particulier f_M^m est un élément de $H_M(F)$, qu'on note Φ_M .

On note Φ_V l'élément correspondant dans $H_V(\overline{\mathbb{Q}_p})$, c'est à dire $\alpha(\Phi_M)$. L'élément Φ_V dépend du choix de α , mais sa classe de $H_V(\overline{\mathbb{Q}_p})$ -conjugaison ne dépend pas de choix.

Pour définir le cocaractère de Newton, on décompose tout module filtré N comme somme directe $\bigoplus_{i \in \mathbb{Q}} N_i$ où N_i est la somme des espaces propres de la partie semisimple de f_N^m pour lesquels les valeurs propres sont de valuation p -adique mi . (On met le facteur m ici pour que la normalisation s'accorde avec celle du cocaractère de Newton du tore de Frobenius et avec celle du cocaractère de Hodge.)

Alors le *cocaractère de Newton* ν_M est le quasi-cocaractère de H_M associé à cette \mathbb{Q} -gradation de $((M))$. On note ν_V le quasi-cocaractère correspondant $\alpha \circ \nu_M$ de $H_{V, \overline{\mathbb{Q}_p}}$.

Exemple. Supposons que E soit une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p ayant bonne réduction et soit M sa cohomologie cristalline. Alors $m = 1$ donc Φ_M est le morphisme f_M qu'on a donné dans la partie 5.1. Le cocaractère de Newton est

$$\begin{aligned} \nu_M(z) &= \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \text{ dans la base } \{e_0, xe_0 + (\alpha - \beta)e_1\} \text{ si la réduction est ordinaire,} \\ \nu_M(z) &= \begin{pmatrix} z^{1/2} \\ z^{1/2} \end{pmatrix} \text{ dans la base } \{e_0, e_1\} \text{ si la réduction est supersingulière.} \end{aligned}$$

5.4 Décomposition de Hodge des modules filtrés

Comme on a remarqué au début du chapitre, le cocaractère de Newton ne suffit pas pour notre but : ce n'est pas un vrai cocaractère, seulement un quasi-

cocaractère, et on ne connaît pas ses poids. Donc on construit un deuxième cocaractère associé à un module filtré, qui est un vrai cocaractère et dont les poids correspondent à la décomposition de Hodge de X .

Wintenberger ([Win84] Théorème 3.1.2) a construit un scindage canonique de la filtration d'un module filtré M : ça veut dire une décomposition de M comme somme directe des F -espaces vectoriels M^j tels que $\text{Fil}^i M = \bigoplus_{j \geq i} M^j$. Ce scindage est fonctoriel et compatible avec les produits tensoriels et duals, donc on obtient une \mathbb{Z} -graduation de la catégorie tannakienne $((M))$, qui s'appelle la *décomposition de Hodge*.

Définition. Le *cocaractère de Hodge* μ_M d'un module filtré M est le cocaractère de H_M qui correspond à la décomposition de Hodge de $((M))$. C'est un vrai cocaractère défini sur F .

On note μ_V le cocaractère correspondant $\alpha \circ \mu_V$ de $H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$. Comme d'habitude, il dépend du choix de l'isomorphisme α mais la classe de $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugaison ne dépend pas de choix.

Lemme 5.1. *La classe de $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugaison de μ_V est définie sur F .*

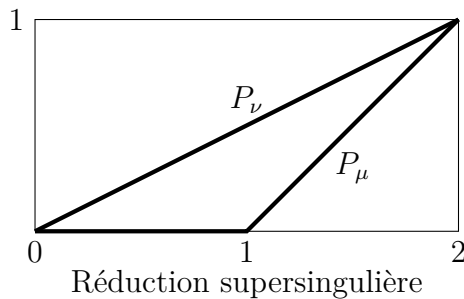
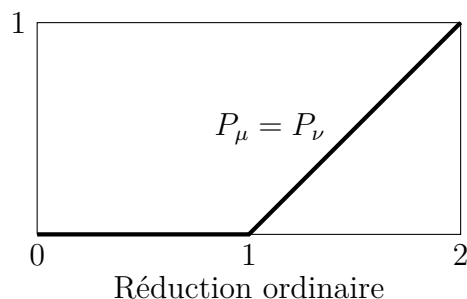
Démonstration. μ_M est défini sur F et $H_{V, F}$ est une forme intérieure de H_M . Donc si $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ alors ${}^\sigma \mu_V = {}^\sigma \alpha(\mu_M)$ et c'est un $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugué de $\alpha(\mu_M)$. \square

On définit le *polygone de Hodge* d'une représentation cristalline V (ou d'un module filtré M) comme le polygone dont les pentes sont les poids du cocaractère de Hodge ; dans la langage du chapitre 2, c'est le polygone $P_{\mu_V}(V)$. On définit le *polygone de Newton* de V ou de M de la même façon, avec les poids du cocaractère de Newton.

Proposition 5.2 ([Fon79] Proposition 4.3.3). *Le polygone de Newton d'une représentation cristalline est au-dessus de son polygone de Hodge.*

Exemple. Si M est la cohomologie cristalline d'une courbe elliptique E , alors les termes M^0, M^1 de la décomposition de Hodge sont les droites engendrées par e_0, e_1 dans la notation de la partie 5.1, et le cocaractère de Hodge est $z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & z \end{pmatrix}$.

Voici les polygones de Newton P_ν et de Hodge P_μ de la cohomologie cristalline d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p :



6 Groupes de monodromie globaux

On applique la théorie des modules filtrés et la théorie des tores de Frobenius développées dans les deux chapitres précédents à l'étude des groupes de monodromie d'une variété abélienne. On montre que les facteurs presque simples des groupes de monodromie sont de type classique et que la représentation tautologique est définie par des poids minuscules. Bien sûr on démontre cette proposition en démontrant que le groupe de monodromie, sa représentation tautologique et une classe de cocaractères de Hodge forment un triplet de Mumford-Tate et en appliquant la classification de tels triplets.

On définit deux classes de cocaractères de Hodge de G_ℓ . La définition évidente est celle des *cocaractères de Hodge forts* du tore de Frobenius ; cependant ils ne suffisent pas pour engendrer G_ℓ° (au moins, on ne sait pas démontrer qu'ils l'engendrent). Donc on définit également la classe des *cocaractères de Hodge faibles* de G_ℓ . C'est une classe assez grande, mais toujours de poids 0 et 1.

Dans tout ce chapitre, on se place dans le cadre du chapitre 4 : on fixe une variété projective lisse X sur un corps de nombres K et un entier d . On note (V_ℓ, ρ_ℓ) la semisimplifiée de $H^d(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$, et G_ℓ le groupe de monodromie algébrique ℓ -adique. On note V_{\max} l'ensemble des places v de K pour lesquels T_{v, \mathbb{Q}_ℓ} est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ -conjugué à un tore maximal de G_ℓ , comme dans le Corollaire 4.9. Si $K = K^{\mathrm{conn}}$, alors c'est un ensemble de densité 1.

Les résultats locaux de ce chapitre seront restreints au cas des places v de K non ramifiées de degré 1, c'est à dire telles que la complétion K_v est isomorphe à \mathbb{Q}_p . Ce n'est pas une restriction forte car cet ensemble a densité 1.

Définition. On note V_1 l'ensemble de places v de K telles que $K_v \cong \mathbb{Q}_p$.

6.1 Application globale de la théorie cristalline

Soit v une place non archimédienne K non ramifiée sur \mathbb{Q} et telle que X a bonne réduction en v . Soit p le caractère résiduel de v . On applique les méthodes p -adiques du chapitre 5 à la cohomologie étale p -adique de X . On sait déjà qu'il y a un conjugué canonique $\pi_{v, \ell}$ de t_v (l'élément de Frobenius abstrait qu'on a défini dans la partie 4.2) dans G_ℓ pour tout $\ell \neq p$. En appliquant la théorie cristalline, on trouve un conjugué $\Phi_{V, v}^{\mathrm{ss}}$ de t_v dans $G_{p, \bar{\mathbb{Q}}_p}$, mais c'est défini seulement à conjugaison par $H_{V, v}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ près.

Fixons un prolongement \bar{v} de v à \bar{K} . Alors $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ est isomorphe au groupe de décomposition $D_{\bar{v}} \subset \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. La restriction de ρ_ℓ à $D_{\bar{v}}$ est ramifiée, mais elle est cristalline donc on applique la théorie du chapitre 5. On utilise les notations du chapitre 5 avec un suffixe v : donc l'adhérence de Zariski de $\rho_\ell(D_{\bar{v}})$ est $H_{V, v}$ (qui est un sous groupe de G_p) etc.

Théorème 6.1 ([Fon82] Conjecture C_{cris} , démontré dans [Fal88]). *Si X est une variété projective lisse sur K ayant bonne réduction \tilde{X}_v en v , alors $H^d(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est une représentation cristalline de $D_{\bar{v}}$, et $H_{\text{cris}}^d(\tilde{X}_v/\mathfrak{o}_v) \otimes_{\mathfrak{o}_v} K_v = \mathbf{D}(H^d(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p))$.*

Théorème 6.2 ([KM74] Théorème 1). *Si X est une variété projective lisse sur K ayant bonne réduction \tilde{X}_v en v et $M = H_{\text{cris}}^d(\tilde{X}_v/\mathfrak{o}_v) \otimes_{\mathfrak{o}_v} K_v$, alors le polynôme caractéristique de $f_{M,v}^m \in \text{GL}(M)$ est égal au polynôme caractéristique de $\rho_\ell(\text{Frob}_v)$ pour $\ell \neq \text{car } k_v$.*

Rappelons qu'on a fixé un élément semisimple $t_v \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ dont le polynôme caractéristique est égal à celui de $\rho_\ell(\text{Frob})_v$ (la partie 4.2). Comme corollaire du théorème 6.2, la partie semisimple de $\Phi_{V,v}$ est $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugué à t_v .

Fixons donc un élément $g_v \in \text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\Phi_{V,v}^{\text{ss}} = g_v t_v g_v^{-1}$. Rappelons qu'on a fait un choix d'isomorphisme $\alpha : H_{M,v,\bar{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow H_{V,v,\bar{\mathbb{Q}}_p}$ pour construire $\Phi_{V,v}$; maintenant il y a un choix supplémentaire de g_v . En tout cas le double coset

$$H_{V,v}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \cdot g_v \cdot \text{Cent}_{\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)}(t_v)$$

ne dépend pas des choix (sauf le choix de t_v , qu'on considère comme fixé une fois pour toutes).

On trouve ainsi un conjugué $g_v T_{v,\bar{\mathbb{Q}}_p} g_v^{-1}$ de T_v dans $H_{V,v,\bar{\mathbb{Q}}_p} \subset G_{p,\bar{\mathbb{Q}}_p}$. De même façon, le conjugué $g_v \nu_v g_v^{-1}$ du cocaractère de Newton du tore de Frobenius est le cocaractère de Newton de la représentation cristalline, qu'on note $\nu'_{V,v}$.

Lemme 6.3. *Si $K = K^{\text{conn}}$ et $v \in V_{\text{max}}$, alors $g_v T_{v,\bar{\mathbb{Q}}_p} g_v^{-1}$ est un tore maximal de $H_{V,v,\bar{\mathbb{Q}}_p}$.*

Démonstration. Si $v \in V_{\text{max}}$, alors le rang de T_v est égal à celui de G_ℓ pour $\ell \neq p$. Selon le lemme 4.7 les rangs de G_ℓ et de G_p sont les mêmes. \square

6.2 Cocaractères de Hodge forts

Les cocaractères de Hodge forts du tore de Frobenius T_v° sont les conjugués du cocaractère de Hodge de H_V qui se factorise à travers T_v° . On déduit facilement des résultats du chapitre 4 sur les cocaractères de Newton que, si v est dans un ensemble de densité 1, alors les images des $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués des cocaractères de Hodge forts engendrent T_v° . Ce résultat est plus utile que la Proposition 4.2 (les cocaractères de Newton engendrent $X_*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) car les cocaractères de Hodge forts sont des vrais cocaractères.

Supposons que $v \in V_{\text{max}} \cap V_1$. Alors $g_v T_{v,\bar{\mathbb{Q}}_p} g_v^{-1}$ est un tore maximal de $H_{V,v,\bar{\mathbb{Q}}_p}$, donc il existe des représentants de la classe de conjugaison du cocaractère de Hodge $\mu_{V,v}$ dans ce tore. Ensuite on conjugue par g_v^{-1} pour avoir des cocaractères du tore de Frobenius abstrait $T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}^\circ$. (Remarquons que $\mu_{V,v}$ est défini seulement sur $\bar{\mathbb{Q}}_p$, mais

les conjugués dans $T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}$ sont définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$ car le corps de définition d'un cocaractère d'un tore est toujours une extension algébrique du corps de définition du tore.)

Définition. On note $S'_{\mu,v}$ l'ensemble de $H_{V,v}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugués de $\mu_{V,v}$ qui se factorisent à travers $g_v T_{v,\bar{\mathbb{Q}}_p} g_v^{-1}$.

On note $S_{\mu,v} = g_v^{-1} S'_{\mu,v} g_v$. C'est un ensemble des cocaractères de $T_{v,\bar{\mathbb{Q}}_p}$. Ses éléments s'appellent *cocaractères de Hodge forts* de T_v .

Lemme 6.4 ([Pin98] Théorème 3.15). *Si $K = K^{\text{conn}}$ et $v \in V_{\text{max}} \cap V_1$ alors le cocaractère de Newton ν_v est dans $\text{Conv}(S_{\mu,v})$.*

Démonstration. On applique la Proposition 5.2, qui affirme que le polygone de Newton d'une représentation cristalline est au-dessus du polygone de Hodge, avec la Proposition 2.3, qui affirme que si $P_{\nu'_{V,v}}(W)$ est au-dessus de $P_{\mu_{V,v}}(W)$ pour toute représentation W de $H_{V,v}$, alors $\nu'_{V,v} \in \text{Conv}(S_{\mu_{V,v}})$.

Une représentation W de $H_{V,v}$ est un objet de la catégorie tannakienne $((V)) \subset \mathbf{Rep}_{D_v}^{\text{cris}}$, donc elle correspond à un module filtré dans $((M))$. Comme les cocaractères de Hodge des modules filtrés sont fonctoriels, le polygone de Hodge de W (qui est a priori défini en termes du cocaractère de Hodge de W) coïncide avec $P_{\mu_{V,v}}(W)$. La même chose est vraie pour les polygones de Newton. Donc la Proposition 5.2 implique que $P_{\nu'_{V,v}}(W)$ est au-dessus de $P_{\mu_{V,v}}(W)$, et on peut appliquer la Proposition 2.3.

Il reste à montrer que $S'_{\mu,v}$ coïncide avec l'ensemble $S_{\mu_{V,v}}$ défini dans le chapitre 2. Rappelons que $S_{\mu_{V,v}}$ est l'ensemble des $H_{V,v}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \rtimes \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ -conjugués de $\mu_{V,v}$ qui se factorisent à travers le tore maximal $g_v T_{v,\bar{\mathbb{Q}}_p} g_v^{-1}$. Par le Lemme 5.1, la classe de $H_{V,v}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugaison de $\mu_{V,v}$ est stable par l'action de $K_v = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (on applique ici l'hypothèse $v \in V_1$). Donc il suffit de prendre les $H_{V,v}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugués, c'est à dire l'ensemble $S'_{\mu,v}$.

Enfin on conjugue par g_v^{-1} , envoyant de $S'_{\mu,v}$ dans $S_{\mu,v}$ et $\nu'_{V,v}$ dans ν_v . \square

Proposition 6.5 ([Pin98] Théorème 3.16). *Si $K = K^{\text{conn}}$ et $v \in V_{\text{max}} \cap V_1$, alors les images des $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués des cocaractères de Hodge forts engendrent T_v° .*

Démonstration. Le lemme 6.4 implique a fortiori que ν_v est dans le sous-espace de $X_*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ engendré par les cocaractères de Hodge forts. Par la Proposition 4.2, les $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués de ν_v engendrent $X_*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Donc les $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués des cocaractères de Hodge forts engendrent l'espace des cocaractères $X_*(T_{v,\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. \square

6.3 Cocaractères de Hodge faibles

On conjecture que G_p° est engendré par les $G_p(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugués des cocaractères de Hodge forts pour les places de K divisant p . Cependant dans la Proposition 6.5

on avait besoin de tous les $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugués des cocaractères de Hodge forts, donc on ne peut en déduire qu'un résultat plus faible en termes des cocaractères de Hodge faibles.

Définition. Un *cocaractère de Hodge faible* de G_p (ou de T_v) est un cocaractère μ de $G_{p, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ (ou de $T_{v, \bar{\mathbb{Q}}}$) dont les multiplicités des poids $i \in \mathbb{Z}$ de $\rho_p \circ \mu$ sont les nombres de Hodge $h^{i, d-i}$ de $X(\mathbb{C})$.

Comme la comparaison entre la cohomologie cristalline et la cohomologie de de Rham est compatible avec les filtrations, les nombres de Hodge de $X(\mathbb{C})$ coïncident avec les multiplicités des poids de $\mu_{M, v}$ dans la cohomologie cristalline. Donc les cocaractères de Hodge faibles de G_p sont tous les $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugués de $\mu_{V, v}$ qui se factorisent à travers G_p . Cette classe de conjugaison ne dépend pas de v ou p , étant déterminée par la géométrie de $X(\mathbb{C})$. Remarquons que tout $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -conjugué d'un cocaractère de Hodge fort de T_v est un cocaractère de Hodge faible.

Théorème 6.6 ([Pin98] Théorème 3.18). *Pour tout premier ℓ , les images des cocaractères de Hodge faibles engendrent G_ℓ° .*

Démonstration. On peut supposer que $K = K^{\text{conn}}$ (cette réduction remplace G_p par G_p°). On choisit une place $v \in V_{\text{max}} \cap V_1$ qui ne divise pas ℓ . Par la Proposition 6.5, les images des cocaractères de Hodge faibles de T_v engendrent T_v .

Comme $v \in V_{\text{max}}$, $T_{v, \bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ est $\text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ -conjugué aux tores maximaux de G_ℓ . Donc les tores maximaux de G_ℓ sont engendrés par les images des cocaractères de Hodge faibles. Comme G_ℓ est réductif, il est engendré par ses tores maximaux ([Hum75] Exercice 26.12). \square

6.4 Conjecture des poids minuscules

Supposons maintenant que X soit une variété abélienne. Le seul cas intéressant est $d = 1$ i.e. ρ_ℓ est la représentation de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ dans $H^1(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Alors les poids des cocaractères de Hodge sont 0 et 1 donc $(G_\ell^\circ, \rho_\ell)$ font partie d'un triplet de Mumford-Tate faible. On peut appliquer la classification des triplets de Mumford-Tate pour conclure que ρ_ℓ est définie par des poids minuscules.

On sait que le groupe de Mumford-Tate de X fait partie d'un triplet de Mumford-Tate fort, donc on s'attend à ce que la même chose soit vraie pour G_ℓ° . Pink a démontré que, si $\text{End}(X_{\bar{K}}) = \mathbb{Z}$, alors G_ℓ° fait partie d'un triplet de Mumford-Tate fort pour un ensemble de premiers ℓ de densité 1 ([Pin98] Théorème 5.13). Cette démonstration applique des méthodes tout à fait différents de ceux traités dans ce mémoire : elle se base sur la combinatoire des groupes de Weyl et des caractères formels. Cependant l'argument pour démontrer que c'est un triplet fort dépend essentiellement sur l'hypothèse sur les endomorphismes de X ; dans ce mémoire on n'a pas eu besoin des restrictions sur X .

Proposition 6.7 ([Pin98] Théorème 5.10). *Si Ψ est l'ensemble des cocaractères de Hodge faibles de G_ℓ , alors $(G_\ell^\circ, \rho_\ell, \Psi)$ est un triplet de Mumford-Tate faible de poids $\{0, 1\}$.*

Corollaire 6.8 ([Pin98] Corollaire 5.11). *Tout facteur presque simple de G_ℓ° est de type classique et la représentation tautologique de G_ℓ est définie par des couples minuscules.*

La Proposition 6.7 est un corollaire du Théorème 6.6. Ensuite on en déduit le Corollaire 6.8 en appliquant les résultats du chapitre 3.

7 Représentations ordinaires

Rappelons que le polygone de Newton d'une représentation cristalline est toujours au-dessus de son polygone de Hodge. On dit qu'une représentation cristalline est *ordinaire* si ces deux polygones coïncident. C'est une généralisation de l'idée classique de réduction ordinaire d'une variété abélienne : la représentation p -adique associée à une variété abélienne est ordinaire si et seulement si la réduction de la variété en p est ordinaire.

Le but de ce chapitre est de démontrer que si une représentation est ordinaire, alors son groupe de monodromie est résoluble. On étudie la catégorie tannakienne engendrée par le module filtré correspondant, pour trouver un ensemble des éléments et des cocaractères qui engendrent son groupe tannakien H_M . Il faut aussi comprendre la relation entre le morphisme de Frobenius sur le module filtré et l'action du groupe de Galois sur H_V .

7.1 La classe de conjugaison de Frobenius

Soit F une extension finie non ramifiée de \mathbb{Q}_p , V une représentation cristalline de $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ et $M = \mathbf{D}(V)$ le module filtré correspondant. Rappelons qu'on a un automorphisme F -linéaire de Frobenius $\Phi_M = f_M^m \in H_M(F)$. Via un isomorphisme $H_{M, \bar{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$, il correspond à un élément $\Phi_V \in H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$, dont la classe de conjugaison ne dépend pas de choix d'isomorphisme $H_{M, \bar{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$. Il est évident que cette classe de conjugaison est définie sur F . Dans cette partie on démontre qu'elle est définie sur \mathbb{Q}_p .

On note ω_M, ω_V les foncteurs fibres $((M)) \rightarrow \mathbf{Vect}_F$ et $((V)) \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$. Rappelons qu'il y a une équivalence canonique de catégories prétannakiennes $\mathbf{D} : ((V)) \rightarrow ((M))$, donc on peut identifier ces deux catégories. Cette identification étant faite, les foncteurs fibres deviennent isomorphes après extension des scalaires à la clôture algébrique. On fixe un isomorphisme $u : \omega_M \otimes_F \bar{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \omega_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p$. On note $\alpha : H_{M, \bar{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ l'isomorphisme correspondant des groupes tannakiens.

On choisit un prolongement du Frobenius $\sigma : F \rightarrow F$ en automorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Soit $\sigma^* : \mathbf{Vect}_F \rightarrow \mathbf{Vect}_F$ le foncteur qui envoie un F -espace vectoriel dans l'espace avec le même ensemble sous-jacent mais avec l'action de F tordu par σ (le Frobenius de F/\mathbb{Q}_p). Alors la composée $\sigma^* \omega_M$ est un deuxième foncteur fibre $((M)) \rightarrow \mathbf{Vect}_F$.

Pour tout objet N de $((M))$ on peut interpréter f_N comme un isomorphisme de F -espaces vectoriels $\sigma^* \omega_M(N) \rightarrow \omega_M(N)$. Ainsi on obtient une \otimes -équivalence $f : \sigma^* \omega_M \xrightarrow{\sim} \omega_M$. On note $\psi : \sigma^* H_M \rightarrow H_M$ l'isomorphisme correspondant de groupes tannakiens. Si on regarde H_M comme sous-groupe de $\text{GL}(M)$, alors ψ est donné par

$$\psi(h) = f_M \circ h \circ f_M^{-1}.$$

Le groupe H_V est défini sur \mathbb{Q}_p , donc il y a un isomorphisme canonique $H_{V,F} \rightarrow \sigma^* H_{V,F}$ qu'on notera s_σ . Il correspond à l'équivalence des foncteurs fibres

$$1 \otimes \sigma : \omega_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} F \Rightarrow \sigma^*(\omega_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} F) = \omega_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \sigma^* F.$$

Enfin on a de isomorphismes des groupes algébriques sur $\bar{\mathbb{Q}}_p$:

$$H_{V,\bar{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{s_\sigma} \sigma^* H_{V,\bar{\mathbb{Q}}_p} \xleftarrow{\sigma^* \alpha} \sigma^* H_{M,\bar{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\psi} H_{M,\bar{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\alpha} H_{V,\bar{\mathbb{Q}}_p}. \quad (1)$$

Lemme 7.1. *La composée de ces isomorphismes est un automorphisme intérieur de $H_{V,\bar{\mathbb{Q}}_p}$, disons conjugaison par $g_\sigma \in H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$.*

Démonstration. Cette composée est induite par un isomorphisme du foncteur fibre $\omega_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p$ (car tous les morphismes des groupes dans (1) étaient induits par des équivalences de foncteurs fibres). \square

Corollaire 7.2 ([Pin98] Proposition 2.2). *La classe de conjugaison de Φ_V dans $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ est définie sur \mathbb{Q}_p .*

Démonstration. Comme $\Phi_M \in H_M(F)$, la classe de conjugaison de Φ_V est définie sur F donc il suffit de démontrer que $\sigma \Phi_V$ est conjugué à Φ_V .

Par définition, $\psi(\sigma^* \Phi_M) = \Phi_M$ donc on a la suite suivante des éléments dans (1) :

$$\sigma \Phi_V \xrightarrow{s_\sigma} \sigma^* \Phi_V \xleftarrow{\sigma^* \alpha} \sigma^* \Phi_M \xrightarrow{\psi} \Phi_M \xrightarrow{\alpha} \Phi_V$$

Donc $\sigma \Phi_V = g_\sigma^{-1} \Phi_V g_\sigma$. \square

7.2 Générateurs de H_M

On a défini le groupe H_M comme le groupe tannakien correspondant au module filtré M . C'est une définition abstraite; maintenant on donne une description plus concrète, en donnant des générateurs du groupe. Plus précisément, H_M est le groupe algébrique engendré par le morphisme de Frobenius linéaire Φ_M et les twists $\psi^i \mu_M$ du cocaractères de Hodge par le Frobenius.

On veut définir $\psi \mu_M$ comme $\psi \circ \mu_M$, mais cette définition n'a pas de sens car ψ est σ -semi-linéaire. Donc il faut tordre le domaine aussi par σ . La bonne définition est la suivante.

Définition. Le twist par Frobenius $\psi \mu_M$ du cocaractère de Hodge est la composée

$$\mathbb{G}_{m,F} \xrightarrow{s_\sigma} \sigma^* \mathbb{G}_{m,F} \xrightarrow{\sigma^* \mu_M} \sigma^* H_M \xrightarrow{\psi} H_M$$

et plus généralement, $\psi^i \mu_M = \psi^i \circ (\sigma^i)^* \mu_M \circ s_\sigma^i$. Concrètement, si $x \in \mathbb{G}_m(\bar{F})$:

$$\psi^i \mu_M(x) = f_M^i \circ \mu_M(\sigma^{-i} x) \circ f_M^{-i}.$$

On verra (Lemme 7.5) que la torsion par ψ dans H_M correspond à torsion par σ dans H_V (à conjugaison près).

Rappelons que $((M))$ est une catégorie tannakienne non neutre sur \mathbb{Q}_p , munie d'un foncteur fibre dans \mathbf{Vect}_F . C'est plus facile d'étudier l'extension des scalaires $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ qui est une catégorie tannakienne neutre sur F , avec le même groupe tannakien H_M . En particulier, $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ est \otimes -équivalente à \mathbf{Rep}_{H_M} (Lemme 1.6).

Soit H' l'adhérence de Zariski du sous-groupe de H_M engendré par Φ_M et les images des $\psi^i \mu_M$ (pour $i \in \mathbb{Z}$). Remarquons que $\psi^m \mu_M = (\text{Int } \Phi_M) \circ \mu_M$ donc il suffit de prendre Φ_M et les images de $\psi^i \mu_M$ pour $0 \leq i \leq m-1$ pour engendrer (un sous-groupe dense de) H' .

Lemme 7.3. *Le foncteur de restriction $\mathbf{Rep}_{H_M} \rightarrow \mathbf{Rep}_{H'}$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. Si (N, α) est un objet de $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$, alors $\omega'_M((N, \alpha)) = \omega_M(N)$ est muni d'une structure de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ -module. Donc il se décompose comme somme directe des sous-espaces N_i (pour $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) correspondant aux éléments $\sigma^i \in \text{Gal}(F/\mathbb{Q}_p)$:

$$N_i = \left\{ v \in \omega_M(N) \mid \alpha(x)v = (\sigma^i x)v \text{ pour } x \in F \right\}.$$

Les $\alpha(x)$ préservent la décomposition de Hodge (car ils sont des endomorphismes de N dans \mathbf{MF}_F^a), donc chaque N_i est muni de sa propre décomposition de Hodge $N_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} N_i^j$ où $N_i^j = N^j \cap N_i$. Le morphisme de Frobenius f_N envoie N_i dans N_{i+1} car il est σ -linéaire.

On peut identifier N_i à N_0 via f_N^i pour $0 \leq i \leq m-1$. Bien sûr cette identification ne préserve pas la structure de F -espace vectoriel de N_i , mais elle préserve la propriété d'être un F -sous-espace. Donc on obtient m décompositions de N_0 :

$$N_0 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{N}_i^j \text{ où } \tilde{N}_i^j = f_N^{-i}(N_i^j) \text{ pour } 0 \leq i \leq m-1.$$

Les morphismes f_N^i pour $0 \leq i \leq m-1$ se cachent dans ces identifications de N_i à N_0 , mais il faut se souvenir de f_N^m , qui se restreint à un automorphisme de N_0 en tant que F -espace vectoriel.

On obtient ainsi un foncteur $(N, \alpha) \mapsto N_0$ de $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ dans la catégorie de F -espaces vectoriels munis de m décompositions $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{N}_i^j$ et un automorphisme f_N^m . On peut vérifier que ce foncteur est pleinement fidèle : un morphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ -modules $h : \omega'_M((N, \alpha)) \rightarrow \omega'_M((N', \alpha'))$ est un morphisme de la catégorie $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ si et seulement si sa restriction $h|_{N_0}$ commute avec les m décompositions de Hodge et l'automorphisme de Frobenius.

Un petit calcul montre que

$$\begin{aligned}\tilde{N}_i^j &= f_M^{-i} \left(\left\{ v \in N_i \mid \mu_M(x)v = x^j v \text{ pour } x \in F^\times \right\} \right) \\ &= \left\{ v \in N_0 \mid \psi^{-i} \mu_M(x)v = x^j v \text{ pour } x \in F^\times \right\}\end{aligned}$$

donc la graduation $N_0 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{N}_i^j$ correspond au cocaractère $\psi^{-i} \mu_M$ de H_M .

Donc un morphisme $h : N_0 \rightarrow N'_0$ préserve la décomposition $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{N}_i^j$ si et seulement si il commute avec l'action de l'image de $\psi^{-i} \mu_M$. Enfin h provient d'un morphisme de $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ si et seulement si il commute avec les images de $\psi^{-i} \mu_M$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et avec Φ_M (qui agit sur N_0 par f_N^m).

Donc un morphisme $\omega(N, \alpha) \rightarrow \omega(N', \alpha')$ provient d'un morphisme $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ si et seulement si il commute avec l'action de H' . En d'autres termes, le foncteur $\mathbf{Rep}_{H_M} \cong ((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F \rightarrow \mathbf{Rep}_{H'}$ est pleinement fidèle. \square

Proposition 7.4 ([Pin98] Proposition 2.5). *L'élément Φ_M et les images des cocaractères $\psi^i \mu_M$ pour $i \in \mathbb{Z}$ engendrent un sous-groupe Zariski dense de H_M .*

Démonstration. On a vu dans le lemme précédent que le foncteur de restriction $\mathbf{Rep}_{H_M} \rightarrow \mathbf{Rep}_{H'}$ est pleinement fidèle.

De plus, par la même raison que dans la démonstration du Lemme 7.3, un sous-espace vectoriel de $\omega(N, \alpha)$ provient d'un sous-objet de (N, α) (dans la catégorie $((M)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$) si et seulement si il est stable par H' .

Donc le morphisme correspondant des groupes tannakiens $H' \rightarrow H_M$ est fidèlement plat (Proposition 1.3). En particulier, c'est surjectif. Mais ce morphisme est simplement l'inclusion $H' \hookrightarrow H_M$, donc $H' = H_M$. \square

7.3 Groupes de monodromie résolubles

On montre que le groupe de monodromie d'une représentation cristalline ordinaire est résoluble. On a déjà vu que c'est vrai pour les courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p : si la réduction est ordinaire, alors le groupe de monodromie est un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_{2, \mathbb{Q}_p}$. La réciproque n'est pas du tout vraie : si $p > 3$, alors le groupe de monodromie d'une courbe elliptique à réduction supersingulière est une extension d'un tore par $\mathbb{Z}/2$ donc résoluble. Par contre, pour $p = 2$ ou 3 il existe des courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p ayant réduction supersingulière dont le groupe de monodromie n'est pas résoluble (c'est égal à $\mathrm{GL}_{2, \mathbb{Q}_p}$).

Soit H_{μ_V} le plus petit sous-groupe de H_V défini sur \mathbb{Q}_p qui contient les images de tous les $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ conjugués de μ_V . En d'autres termes, $H_{\mu_V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ est le sous-groupe algébrique de $G_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ engendré par les images de tous les $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ -conjugués de μ_V .

Lemme 7.5. *Le twist $\psi \mu_M$ du cocaractère de Hodge de H_M correspond via α à un $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugué de $\sigma \mu_V$.*

Démonstration. Dans le diagramme commutatif suivant, la ligne en haut est celle du Lemme 7.1, donc sa composée est un automorphisme intérieur $\text{Int } g_\sigma$ de $H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p} & \xrightarrow{s_\sigma} & \sigma^* H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p} & \xleftarrow{\sigma^* \alpha} & \sigma^* H_{M, \bar{\mathbb{Q}}_p} & \xrightarrow{\psi_{\bar{K}}} & H_{M, \bar{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\alpha} H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p} \\
 \sigma \mu_V \uparrow & & \sigma^* \mu_V \uparrow & & \nearrow \sigma^* \mu_M & & \nearrow \\
 \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}_p} & \xrightarrow{s_\sigma} & \sigma^* \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{Q}}_p} & & & & \\
 & & & & \searrow \psi \mu_M & &
 \end{array}$$

Donc $\alpha \circ \psi \mu_M = \text{Int } g_\sigma \circ \sigma \mu_V$. □

Lemme 7.6. *Le groupe quotient H_V/H_{μ_V} est commutatif.*

Démonstration. Grâce au Lemme 7.5 l'image de $\alpha \circ \psi^i \mu_M$ est contenue dans $H_{\mu_V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ pour tout entier i . Donc par la Proposition 7.4, $H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ est engendré (en tant que groupe algébrique sur $\bar{\mathbb{Q}}_p$) par $H_{\mu_V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$ et Φ_V .

Donc le sous-groupe engendré par la classe de Φ_V est dense dans $H_{V, \bar{\mathbb{Q}}_p}/H_{\mu_V, \bar{\mathbb{Q}}_p}$, donc celui-ci est commutatif. □

Lemme 7.7. *Si V est une représentation ordinaire, alors H_{μ_V} est résoluble.*

Démonstration. On regarde les ensembles S_{μ_V}, S_{ν_V} des $H_V(\bar{\mathbb{Q}}_p) \rtimes \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ -conjugués de μ_V, ν_V qui se factorise à travers un tore maximal fixé, comme dans le chapitre 2. On démontre que S_{μ_V} est réduit à un point ; alors on peut appliquer la Proposition 2.6 pour conclure que H_{μ_V} est résoluble.

La Proposition 5.2 affirme que le polygone de Newton est au-dessus du polygone de Hodge. On peut fortifier ce résultat pour démontrer que pour toute représentation cristalline irréductible, le polygone de Newton est strictement au-dessus du polygone de Hodge, si le polygone de Hodge n'est pas une droite ([Pin98] Théorème 2.3). L'argument ressemble à celui de la Proposition 2.5 : on suppose que les polygones de Hodge et de Newton se rencontrent dans un sommet du polygone de Newton, puis on démontre que le module filtré associé possède un sous-module filtré admissible, contredisant l'irréductibilité de la représentation. Donc par la Proposition 2.5, $S_{\nu_V} \subset \text{Int}(\text{Conv}(S_{\mu_V}))$ pour toute représentation cristalline.

La H_V -représentation V est fidèle, donc quand V est ordinaire on peut appliquer la Proposition 2.4 pour en déduire que $S_{\mu_V} = S_{\nu_V}$. Maintenant on sait que $S_{\mu_V} \subset \text{Int}(\text{Conv}(S_{\mu_V}))$, donc S_{μ_V} est réduit à un point. La Proposition 2.6 implique que H_{μ_V} est résoluble. □

Corollaire 7.8 ([Pin98] Proposition 2.9). *Si V est une représentation ordinaire, alors H_V est résoluble.*

Références

- [Ber01] Laurent Berger. An introduction to the theory of p -adic representations. Notes at <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/article05/article05.pdf>, 2001.
- [Bor91] Armand Borel. *Linear Algebraic Groups*. Springer-Verlag, second edition, 1991.
- [Bou68] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*. Hermann, 1968.
- [Bou75] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 7 et 8*. Hermann, 1975.
- [Chi92] Wenchen Chi. ℓ -adic and λ -adic representations associated to abelian varieties defined over number fields. *American Journal of Mathematics*, 114:315–353, 1992.
- [DM82] Pierre Deligne and J. S. Milne. Tannakian categories. In *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, number 900 in Lecture Notes in Mathematics, pages 101–228. Springer, 1982.
- [Fal88] Gerd Faltings. Crystalline Cohomology and p -adic Galois Representations. In Jun-Ichi Igusa, editor, *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, pages 25–80, 1988.
- [Fon79] Jean-Marc Fontaine. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes*, Astérisque 65, pages 3–80, 1979.
- [Fon82] Jean-Marc Fontaine. Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Annals of Mathematics*, 115:529–577, 1982.
- [Hum75] James E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. Springer, 1975.
- [JK01] Kirti Joshi and Chandrasekhar Khare. On Ordinary forms and Ordinary Galois representations. *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, 16:215–229, 2001.
- [Kat94] Nicholas M. Katz. Review of ℓ -adic cohomology. In Jannsen, Kleiman, and Serre, editors, *Motives*, number 55 in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, pages 21–30, 1994.
- [KM74] Nicholas M. Katz and William Messing. Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields. *Inventiones mathematicae*, 23:73–77, 1974.
- [Pin98] Richard Pink. ℓ -adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 495:187–237, 1998.

- [Ser64a] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie Galoisienne*. Springer-Verlag, 1964.
- [Ser64b] Jean-Pierre Serre. Groupes de lie ℓ -adiques attachés aux courbes elliptiques. In *Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres*, number 143 in Colloques du CNRS, pages 239–256. CNRS, 1964.
- [Ser68] Jean-Pierre Serre. *Abelian l -adic Representations and Elliptic Curves*. Benjamin, 1968.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. Représentations l -adiques. In S. Iyanaga, editor, *Algebraic Number Theory*, pages 177–193, 1977.
- [Ser79] Jean-Pierre Serre. Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate. *Astérisque*, 65:155–187, 1979.
- [Ser81] Jean-Pierre Serre. Lettre à Ken Ribet de 1/1/1981, 1981.
- [Ser85] Jean-Pierre Serre. Résumé des cours de 1984–1985. *Annuaire du Collège de France*, 1985.
- [Win84] J.-P. Wintenberger. Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux. *Annals of Mathematics*, 119:511–548, 1984.